

# 102

2019



# epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"



# epsilon 102

Revista de Educación Matemática

## Director

Alexander Maz

## Comité Editor

Francisco España

Inmaculada Serrano

José María Vázquez de la Torre

Salvador Guerrero

Noelia Jimenez

## Comité Científico

Evelio Bedoya,

*Universidad del Valle, Colombia.*

José Carrillo

*Universidad de Huelva, España.*

José Iván López Flores,

*Universidad Autónoma de Zacatecas, México*

José Ortiz,

*Universidad de Carabobo, Venezuela.*

Liliana Mabel Tauber,

*Universidad Nacional del Litoral, Argentina.*

M<sup>a</sup> Mar Moreno,

*Universidad de Alicante, España.*

Matías Camacho,

*Universidad de la Laguna, España.*

Roberto Alfredo Vidal Cortés,

*Universidad Alberto Hurtado, Chile.*

Patricia Pérez Tyteca

*Universidad de Alicante*

Carlos de Castro

*Universidad Autónoma de Madrid*

M<sup>a</sup> Jose Madrid

*Universidad Pontificia de Salamanca*

**Página de la revista:** <http://thales.cica.es/epsilon>

**Revista:** [epsilon@thales.cica.es](mailto:epsilon@thales.cica.es)

Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”

## Edita

Sociedad Andaluza de  
Educación Matemática “Thales”

Centro Documentación “Thales”

Universidad de Cádiz

C.A.S.E.M.

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Campus del Río San Pedro

Torre Central, 4<sup>a</sup> planta

11510 Puerto Real (Cádiz)

Teléfono: 956012833

Email: [thales.matematicas@uca.es](mailto:thales.matematicas@uca.es)

## Maquetación

[mayteando@gmail.com](mailto:mayteando@gmail.com)

## Depósito Legal

SE-421-1984

## ISSN

2340-714X

## Período

2019

## Suscripción

Anual



7

## INVESTIGACIÓN

- 7 **La desviación media: estrategias empleadas por estudiantes de secundaria en una situación didáctica/** The average deviation: strategies used by secondary students in a didactic situation

Jocelyn D. Pallauta

Daniela Bonilla

Daniela Olivares

25

## EXPERIENCIAS

- 25 **Enseñanza de fractales a partir de preguntas: descripción de una experiencia en un curso de matemática del último año de la escuela secundaria/** Teaching fractals from questions: description of an experience in a mathematics course in the last year of high school

Nadia Belén Martín

Verónica Parra

María de los Ángeles Fanaro

- 35 **Cómo las matemáticas nos pueden salvar de un apocalipsis zombie.../** How mathematics can save us from a zombie apocalypse....

Fernando Arribas Ruiz

María del Carmen Galán Mata

Jaime González Cimas

Álvaro Luque Borrego

43

## IDEAS PARA EL AULA

- 43 **La modelización matemática a través de las actividades generadoras de modelos: una propuesta para el aula de secundaria/** The Mathematical Modelling through Mode-Eliciting Activities: A proposal for the secondary classroom

César Trelles-Zambrano, Universidad de Cuenca

Ximena Toalongo, Universidad de Girona

Ángel Alsina, Universidad de Girona

Neli Gonzáles, Universidad de Cuenca

61

## MISCELÁNEA

**61 Partición prismática de paralelepípedos en seis pirámides triangulares equivalentes/** Dissection of convex hexaedrons of quadrilateral faces into pyramids

José R. Galo Sánchez

**89 Cuatro referentes de mujeres actuales galardonadas en matemáticas/** Four referents of current women awarded in mathematics

Lucía Manzorro Castrillón, Universidad de Sevilla

Juan Núñez Valdés, Universidad de Sevilla

Mencia Veas Lerdo de Tejada , Universidad de Sevilla

**107 RINCÓN “SAPERE AUDE”... ¿resolviendo problemas?**

Sixto Romero

## La desviación media: estrategias empleadas por estudiantes de secundaria en una situación didáctica

Jocelyn D. Pallauta  
*Universidad de Granada*

Daniela Bonilla  
*Pontificia Universidad Católica de Valparaíso*

Daniela Olivares  
*Universidad de La Serena*

**Resumen:** *Se presentan las estrategias puestas en juego por un grupo de estudiantes chilenos de secundaria (16 a 17 años), para la toma de decisiones en torno a la representatividad de las medidas de centralización. El diseño de la situación didáctica y su aplicación están fundamentadas en la Teoría de Situaciones Didácticas. El análisis de las respuestas entregadas informa sobre las debilidades evidenciadas en el lenguaje y argumentos empleados en la resolución, además de las ideas intuitivas que poseen sobre la dispersión, que permitirían el estudio y profundización de otras medidas de dispersión como la varianza y la desviación estándar.*

**Palabras clave:** *Situación didáctica, medidas de dispersión, enseñanza secundaria.*

## The average deviation: strategies used by secondary students in a didactic situation

**Abstract:** *We present the strategies put into play by a group of Chilean secondary school students (16 to 17 years old), to make decisions about the representativeness of centralization measures. The design of the didactic situation and its application are based on the Theory of Didactical Situations. The analysis of the answers informs about the weaknesses evidenced in the language and arguments used in the resolution, besides the intuitive ideas that they have about dispersion, which would allow them to study and deepen in other measures of dispersion such as variance and standard deviation.*

**Keywords:** *Didactical situation, measures of statistical dispersion, secondary education*

## ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA

La estadística se ha convertido en una herramienta fundamental en el ámbito personal, profesional y en la investigación, dada la cantidad de información con la que los ciudadanos deben convivir en lo cotidiano (Batanero, Godino, Vallecillos, Green y Holmes, 1994). Por este motivo resulta necesario poseer conocimientos básicos para el análisis e interpretación de información, con el objeto de lograr una adecuada toma de decisiones.

En el marco del modelo que proponen Batanero, Díaz, Contreras y Roa (2013) para el desarrollo de un razonamiento estadístico, basado en diferentes autores, se destaca la idea de la variación, entendiéndola que la variabilidad aleatoria es un concepto importante en la Estadística, dado que el razonamiento estadístico posibilita el detectar las fuentes que la producen. Es decir, el razonamiento estadístico persigue explicar y establecer las causas de la variación para a partir de allí poder realizar inferencias y predicciones, por lo que resulta de importancia que el estudiante tenga conocimientos que le permitan tener estas competencias en situaciones determinadas.

Las investigaciones apuntan a la importancia del rol de la variación en la estadística. Wild y Pfannkuch (1999) sostienen que la variación se constituye en un aspecto primordial, dado que esta noción se conecta con diferentes conceptos estadísticos en el ámbito del análisis exploratorio de datos, como la dispersión, centralización y distribución. Por otro lado, Cobb y Moore (1997), advierten la importancia de tener presente que cuando se calcula una medida de dispersión, los datos no son sólo números, sino que obedecen a un contexto, en el que se requiere una adecuada interpretación de los valores obtenidos, con el objeto de tomar mejores decisiones en determinadas situaciones.

En este escenario, el estudio de la variación y las medidas de dispersión es relevante en la inferencia estadística. No obstante, las investigaciones de esta temática en educación estadística son escasas (Batanero, López-Martín, González-Ruiz y Díaz-Levicoy, 2015) y en los niveles como la secundaria, prácticamente inexistentes.

Estudios en Didáctica de la Estadística, acusan que la enseñanza de las medidas de centralización y dispersión, se ha limitado a la aplicación de fórmulas, sugiriendo que los profesores carecen de una comprensión profunda de estos conceptos, lo que les dificulta poder ofrecer a sus estudiantes propuestas de enseñanza donde estas medidas cobren sentido (Silva y Coutinho, 2008). Sánchez (2013) y Batanero *et al.* (2015) confirman estas observaciones, agregando que aunque los alumnos son capaces de determinar diferentes medidas de dispersión, presentan dificultades en comprender los procesos y los conceptos involucrados, lo que posteriormente se agudiza con el estudio de la inferencia.

Por consiguiente, Garfield y Ben-Zvi (2008) y Estepa y del Pino (2013) identifican en la enseñanza una desvinculación de las medidas de dispersión respecto a las de centralización, pese a su complementariedad en el análisis exploratorio de los datos. En una experiencia realizada por Orta y Sánchez (2013) con estudiantes de secundaria (14 años), los autores detectaron que resulta muy complejo interpretar la dispersión en contextos de riesgo, porque los estudiantes tienden a realizar comparaciones con valores particulares, evidenciando de esta manera que el tema no es sencillo,

principalmente cuando se trata de interpretar la dispersión para la toma de decisiones en un contexto determinado.

Finalmente, los estudios antes mencionados y otros respecto a la variación estadística (Sánchez, Borim y Coutinho, 2011) dan cuenta de la falencia de tratar la dispersión como el aprendizaje de fórmulas tales como: rango, desviación media, desviación estándar o y/o variancia. Es importante extender propuestas alrededor de la dispersión, que involucren el desarrollo de habilidades de interpretación de acuerdo a un contexto presentado.

Tomando en cuenta las necesidades de la sociedad actual, referente a temas que involucren conocimientos estadísticos, diferentes países han incorporado en sus lineamientos curriculares el estudio de la dispersión. En Estados Unidos, en los estándares propuestos por el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) para la enseñanza de la matemática, en el bloque de Datos y Azar aparecen objetivos que abordan la utilización e interpretación de las diferentes medidas de centralización y dispersión para el análisis de datos. Por ejemplo, uno de los objetivos consiste en “seleccionar y usar métodos estadísticos apropiados para analizar datos, manifestar, buscar, usar e interpretar medidas de centro y dispersión, incluyendo la media y el rango intercuartil” (NCTM, 2000, p.248). Mientras que en el currículo de matemática chileno, el eje de Probabilidad y Estadística también incorpora tópicos asociados a la dispersión, así como habilidades relacionadas con que: “todos los y todas las estudiantes aprendan a realizar análisis, inferencias y obtengan información a partir de datos estadísticos” (MINEDUC, 2015, p.100).

La presente investigación tiene por objetivo evidenciar los argumentos y el lenguaje que priorizan los estudiantes cuando se enfrentan a una situación didáctica para la enseñanza de la desviación media en secundaria.

En este artículo, se describe el proceso de implementación de una propuesta para la enseñanza de la desviación media con estudiantes de secundaria chilenos, con elementos que aporta la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD: Brousseau, 2007). Se realiza una ingeniería didáctica para el análisis de los datos. Dichos resultados se complementan tangencialmente con la visión de lenguaje matemático que nos presenta Godino (2003).

Las producciones fueron categorizadas, basados en las estrategias y el lenguaje empleado para comunicar la solución al problema propuesto. En el sentido de Godino (2003) se tomó en cuenta el lenguaje, como una de las seis entidades primarias que intervienen en la práctica matemática, entendida como las notaciones, gráficos, entre otros, empleados como medio que permite comunicar, validar la solución, junto con generalizarla a otros problemas.

## **DESCRIPCIÓN DEL MARCO TEÓRICO:**

### **a) Teoría de Situaciones Didácticas**

Para el diseño y análisis de la implementación de la propuesta didáctica se consideraron elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (2007).

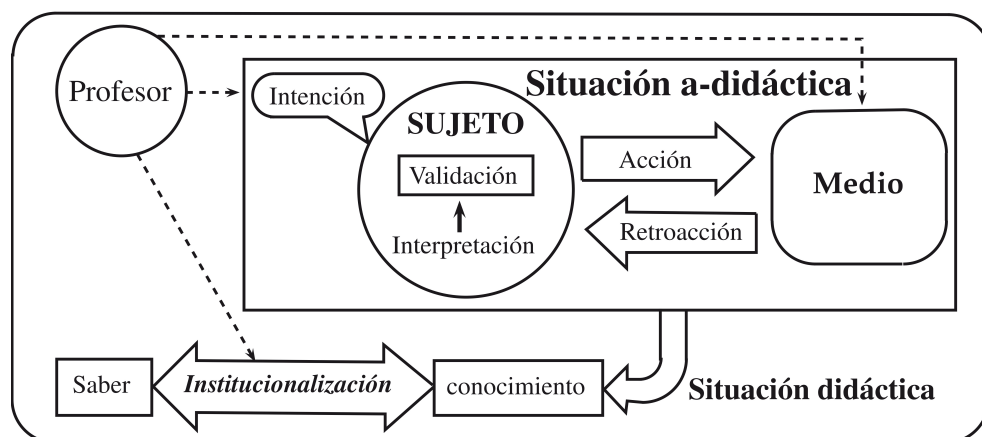


Figura 1. Relación entre situación didáctica y a-didáctica. Tomado de Acosta, Monroy y Rueda (2010).

Este enfoque tiene como objetivo indagar el sistema didáctico, constituido por tres entes: profesor- alumno- saber y sus interacciones (Figura 1), focalizándose en la dimensión cognitiva y epistemológica vinculada a la construcción del conocimiento matemático.

“Una situación es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado” (Brousseau, 2007, p. 17). En el contexto escolar, se considera una situación como el entorno del estudiante, diseñado y manipulado por el profesor, que pretende ser utilizada como una herramienta en el proceso de enseñanza- aprendizaje. Para Brousseau, el medio son los materiales que dispone el estudiante y con los que interactúa para construir su propio conocimiento. El profesor es quien facilita el medio.

La situación didáctica o problema que se le plantea al estudiante es diseñada y propuesta por el profesor, y tiene la intencionalidad de que los conocimientos antiguos pierdan alcance y generen en el sujeto la necesidad de aprender algo nuevo. El profesor debe guiar este proceso por medio de las devoluciones, invitando al alumno a asumir la responsabilidad sobre su aprendizaje al enfrentar la situación-problema (a-didáctica) y a acatar las consecuencias de esta transferencia (Brousseau, 2007).

Según esta teoría, diferenciamos en la propuesta de enseñanza cuatro fases o etapas de implementación: 1) situación de *acción*, en la que se presenta el contexto, la tarea a realizar y el estudiante activa su red conceptual para dar solución a la situación-problema que se plantea; 2) situación de *formulación y comunicación*, en la que el estudiante fija una estrategia para obtener la solución a la situación-problema planteada, que ha sido probada, llevada a cabo y que comunica al resto de estudiantes; 3) situación de *validación*, en la que se justifica el proceso de resolución llevado a cabo frente al del resto de compañeros en situación de debate; y 4) situación de *institucionalización*, en la que el docente fija y formaliza el conocimiento, en nuestro caso de la desviación media, en base a las diferentes estrategias y resoluciones que hayan surgido a lo largo de la sesión por parte de los estudiantes.

## **b) El lenguaje matemático (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2003; Godino, Batanero y Font, 2007)**

El enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2003; Godino, Batanero y Font, 2007), ha abordado la dificultad de la significación y la representación. En este contexto, el lenguaje tiene un rol importante desde la perspectiva representacional e instrumental. Sin embargo, desde esta teoría el lenguaje sólo forma parte en rol de la representación, el que es compartido con otros objetos como: situaciones-problemas, acciones, conceptos, propiedades y argumentos.

En la resolución de problemas matemáticos, Godino (2003) señala que en su solución, generalización, o para detallar a otro sujeto se requiere el empleo del lenguaje, el que se encuentra compuesto de términos, expresiones, notaciones, gráficos, entre otros.

Los símbolos, permiten representar objetos abstractos y situaciones concretas. También se considera como elemento lingüístico las disposiciones tabulares, gráficos, grafos, esquemas, ilustraciones, entre otros los que serían clasificados como tipos de lenguaje gráficos.

El autor considera que el lenguaje no solo tiene atributos como medio de representación, sino que también es un instrumento de la actividad matemática.

## **MÉTODO**

La metodología empleada en la investigación es la Ingeniería Didáctica, por su utilidad para analizar situaciones didácticas. Farfán (1997), declara que la Ingeniería Didáctica se constituye en una metodología de investigación dentro de la Didáctica de las Matemáticas, la que se puede aplicar a los productos de enseñanza basados o derivados de ella y para guiar la experimentación en clase.

Los informantes lo conforman 35 estudiantes que cursaban su tercer año de enseñanza media (16-17 años), de un colegio particular subvencionado chileno, los que se distribuyeron en grupos de 5 integrantes, por afinidad. La muestra fue no probabilística, por disposición.

Algunos de los insumos utilizados para la construcción de la Ingeniería Didáctica, fueron las dificultades observadas en diferentes estudios respecto a la utilidad de la noción de dispersión para la interpretación y análisis de datos, además de la importancia de vincular las medidas de centralización en el estudio de la dispersión, lo que permite finalmente una mejor toma de decisiones en determinados contextos.

Para el análisis de las producciones de los estudiantes se empleó el análisis de contenido como análisis metodológico profundo de textos en su contexto, siguiendo etapas (Mayring, 2000) y de modo sistemático, puesto que el objetivo es inferir y describir la inferencia de conocimientos relativos a las condiciones de producción por medio de indicadores, los que pueden ser cuantitativos o no (Bardin, 1996). Para ello, la revisión bibliográfica, y el marco teórico permitieron definir las categorías de análisis y comprobar su validez (Ghiglione y Matalón, 1989). Durante el análisis se registra, de manera paralela, el lenguaje utilizado en la construcción del argumento que permitía tomar

la decisión, finalizando con la elaboración de tablas para resumir los resultados y obtener conclusiones.

## SITUACIÓN DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA DESVIACIÓN MEDIA

Los estudiantes respondieron a la siguiente situación didáctica (ver Figura 2) que consistió en justificar la decisión de cuál de dos series de datos, con igual media y rango, presenta menor dispersión en un contexto de juego. Cada serie de datos, se corresponde a la posición que ocupan 5 bolas que se lanzan por un carril y ocupan un depósito numerado del 10 al 20, pudiendo albergar cada depósito hasta 5 bolas.

‘Como parte de un jurado te toca decidir quién es el ganador o ganadora del juego.

Las reglas son las siguientes:

R1: Compiten dos participantes Pedro y María

R2: Cada competidor lanza 5 bolitas de derecha a izquierda por el carril, en turnos.

R3: Gana aquel competidor cuyas bolitas estén más cercanas al promedio de ellas.’

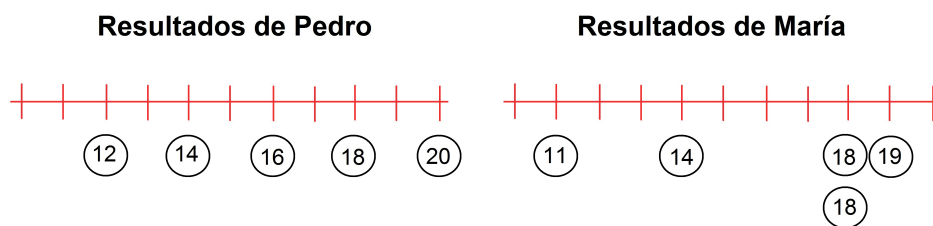


Figura 2. Situación didáctica

## ANÁLISIS A PRIORI DEL INSTRUMENTO

La situación de formulación se produce con base en el reconocimiento de las posibles estrategias de resolución del desafío. Se determinaron cuatro estrategias, que pueden ser válidas o insuficientes, estas surgieron de la literatura investigativa y de las respuestas entregadas por los estudiantes en la fase de formulación, lo que desembocó en cuatro categorías de análisis de las producciones proporcionadas por los estudiantes (ver Tabla 1).

También se observó el lenguaje empleado por el estudiante, dado que es un instrumento que promueve la actividad matemática, permite comunicar, validar y generalizar la respuesta encontrada a la situación propuesta, fue posible identificar dos tipos de lenguaje el de tipo natural y gráfico (ver Tabla 2).

**Tabla 1.** Categorías de análisis de las respuestas.

<b>Categoría</b>	<b>Descripción</b>	<b>Estrategia de resolución</b>
$C_1$ : El estudiante utiliza el concepto de desviación respecto a la media.	El estudiante determina el conjunto de las desviaciones respecto a la media de ambas series de datos.	Estrategia 1: Suma la distancia de cada jugada respecto a la media obtenido por cada competidor, y luego compara ambos resultados.
$C_2$ : El estudiante utiliza medidas de tendencia central.	El estudiante emplea medidas como la media, moda, mediana, máximos y mínimos.	Estrategia 2: Compara valores particulares del conjunto de datos con alguna medida de tendencia central,
$C_3$ : El estudiante utiliza el concepto de desviación media.	El estudiante calcula la desviación media de ambas series de datos.	Estrategia 3: Determina la media de las distancias de los lanzamientos de cada jugador respecto a la media. El ganador es el que obtenga menor valor.
$C_4$ : El estudiante utiliza intervalos centrados en la media.	El estudiante establece una vecindad respecto de la serie de datos inicial (1 al 10).	Estrategia 4: Representa los lanzamientos de ambos jugadores en una recta con todos los posibles resultados, y los compara con respecto a la media de la serie inicial.

**Tabla 2.** Tipo de lenguaje utilizado en las respuestas.

<b>Lenguaje</b>	<b>Descripción</b>
$L_1$ : El estudiante utiliza el lenguaje natural.	El estudiante se basa en el lenguaje natural para establecer sus conjeturas.
$L_2$ : El estudiante utiliza el lenguaje gráfico.	El estudiante representa en gráficos los resultados obtenidos por separado o en conjunto de ambos jugadores. El estudiante representa en una recta los resultados obtenidos por cada jugador, como medio establecer conjeturas.

## **DESCRIPCIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA A LA LUZ DEL MARCO TEÓRICO**

### **Fase de acción**

En la primera fase, los estudiantes conformaron equipos y se les entregó, a cada uno, la tarea que debían realizar. Cada equipo leyó las instrucciones dadas, luego se les asignó un tiempo para buscar soluciones (Figura 3). Las respuestas, en primera instancia, fueron intuitivas y poco elaboradas. Para orientar el trabajo, el profesor les hizo devoluciones,

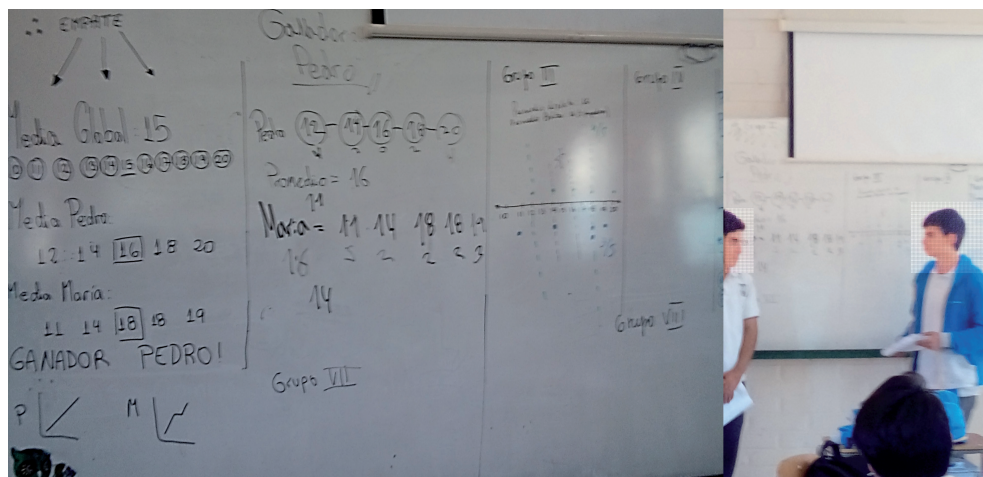


Figura 3. Presentación de respuestas de cada grupo.

por ejemplo: “¿Cómo podemos estar seguros que ese jugador es el ganador?, ¿Crees que ese argumento convencerá a los jueces?”, “¿Puedes crear un argumento matemático que permitan fortalecer tu respuesta?” Estas preguntas motivaron una elaboración con argumentos matemáticos para poder dar respuesta a la cuestión. La mayor parte de los grupos se inclinó por respuestas que obedecían a la estrategia 3 (ver tabla 1).

### Fase de formulación

En la segunda fase, los estudiantes elaboraron diferentes argumentos para justificar la elección del ganador. Cada grupo debió realizar concesos para decidir la estrategia que presentarían, como equipo, al curso. Las argumentaciones, se basaron en interpretaciones de los datos a través de gráficos, uso de intervalos centrados en la mediana de la serie inicial de datos, cálculo de distancias de cada lanzamiento con respecto a la media, promedio de las distancias de cada lanzamiento respecto a la media del conjunto, entre otras. Esto motivó la incertidumbre de algunos equipos, respecto a qué estrategia mostrar, en estos casos, el profesor les propuso que cada uno, dentro del grupo, les explicara a su compañeros su justificación y juntos tomaran una determinación.

### Fase de validación

En la tercera fase, un representante de cada equipo explicó la estrategia empleada, junto con el jugador que consideraba el vencedor (Figura 3). La mayoría coincidía en que era Pedro. La justificación presentada fue discutida y evaluada por el grupo curso. Los mismos estudiantes reconocieron argumentos que carecían de fundamentos o no se ajustaban a las reglas exigidas. También identificaron errores como cálculos incorrectos, gráficos

incompletos o errados en su construcción. A pesar de esto, el argumento empleado, en algunos casos, continuaba siendo válido para dar respuesta a la tarea planteada.

### **Fase de Institucionalización de la desviación media**

En la fase final, se les pidió a los estudiantes que observaran cada una de las estrategias presentadas por sus compañeros y señalaran cuál de ellas fue la que mejor representaba al conjunto de todas las soluciones mostradas. Entre ellas se encontraba la estrategia 4 (Tabla 1). Varios señalaron el mismo argumento (Estrategia 4), a lo que se les preguntó el motivo. Entre las razones manifestaron que la consideraban útil para diferentes conjuntos de datos. Posteriormente, se les pidió que pensarán una descripción general para el procedimiento realizado, y luego tratarán de redactarlo en su cuaderno. Uno de los estudiantes se animó a compartir su respuesta “es la media de las distancias de cada lanzamiento respecto a la media”.

Se le consultó la opinión al grupo curso, ¿Qué opinan al respecto?, ¿Alguno escribió algo diferente?, un estudiante levantó la mano solicitando la palabra, señalando que “es la media de la diferencia de cada dato, respecto a la media aritmética del conjunto de datos”. Otro le rebatió diciendo “no puede ser la diferencia, porque también podría tomar valores negativos”. Tomando en cuenta este aspecto, los estudiantes afirmaron que la diferencia debe ser siempre un valor positivo, a lo que se les preguntó ¿Qué debe pasar para que la diferencia sea siempre positiva?, esto les permitió recordar el concepto de valor absoluto.

Finalmente, el profesor, basándose en las ideas que surgieron desde los estudiantes, los invitó a institucionalizar los conceptos de desviación respecto a la media, y desviación media.

### ***Desviación respecto a la media***

La desviación respecto a la media corresponde a la diferencia en valor absoluto entre cada valor de la variable estadística y la media aritmética, se denota  $D_i$ ,  $D_i = |x - \bar{x}|$

### ***Desviación media***

La desviación media, corresponde a la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones respecto a la media. La desviación media se representa por  $D_{\bar{x}}$ , se calcula

$$D_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - \bar{x}|}{n}$$

## ANÁLISIS A POSTERIORI DE LOS RESULTADOS

Las respuestas entregadas para resolver la situación didáctica, de siete grupos con 5 estudiantes organizados como: G1, G2, G3, G4, G5, G6 y G7 fueron clasificadas en cuatro categorías anteriormente expuestas (ver Tabla 1.). Cabe mencionar que este proceso se realizó a partir de estrategias dadas por grupos de alumnos, posterior a que fueron plan-teadas algunas devoluciones por parte del profesor.

En la situación de formulación, solo tres grupos (G1, G2, G3) resolvieron de forma exitosa la tarea, uno de ellos (G1) alcanza, de forma intuitiva, el concepto desviación media, mientras que cuatro grupos (G4, G5, G6 y G7) utilizaron alguna medida de tendencia central con un dato particular del conjunto para justificar sus respuestas, evidenciando una debilidad para poder hacer comparaciones de grupos de datos. El resumen con los conceptos empleados por los estudiantes para responder a la situación es expuesto en la Tabla 3.

Tabla 3. Clasificación de los conceptos matemáticos y estrategias utilizadas por los grupos

Categoría	Grupo	Total de estudiantes
C <sub>1</sub> : El estudiante utiliza el concepto de desviación respecto a la media.	G <sub>2</sub>	5
C <sub>2</sub> : El estudiante utiliza medidas de tendencia central.	G <sub>4</sub> , G <sub>5</sub> , G <sub>6</sub> y G <sub>7</sub>	20
C <sub>3</sub> : El estudiante utiliza el concepto de desviación media.	G <sub>1</sub>	5
C <sub>4</sub> : El estudiante utiliza intervalos centrados en la media.	G <sub>3</sub>	5

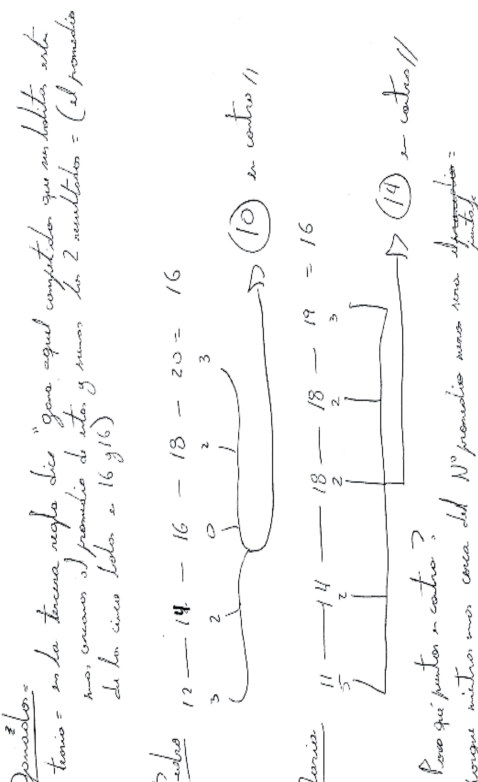
Detectamos que la mayoría de los grupos se aferran a las estrategias asociadas a comparar sólo valores particulares de las series de datos con medidas de tendencia central (media, mediana, máximos y mínimos), lo que genera que decidan basados sólo en esa comparación, la que en muchos casos carece de sentido, como la respuesta del grupo G<sub>6</sub>, en la que considera a Pedro ganador porque la media de los resultados es 16, y como fue el único que acertó a este carril, lo convierte en vencedor, sin tomar en cuenta la regla R3 (ver Figura 2), evidenciando una dificultad en realizar comparaciones de grupos de datos considerando cada grupo como una unidad o distribución.

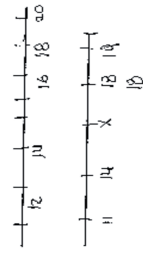
A continuación, mostramos cada una de las respuestas entregadas por los grupos asociada a la categoría correspondiente (ver Tabla 5)

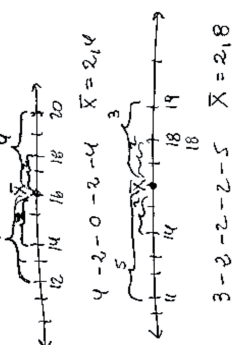
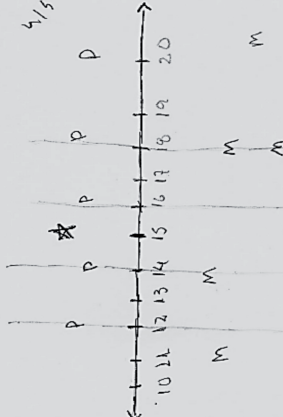
En nuestro análisis, también exploramos el lenguaje que utilizaron los estudiantes para comunicar y validar sus respuestas. Pudimos apreciar que todos los grupos, en un principio emplearon un lenguaje natural, mientras que en la minoría de los casos el de tipo gráfico (ver Tabla 4).

Respecto al tipo de lenguaje empleado en las producciones, lidera el lenguaje natural, seguido por el de tipo gráfico. Consideramos importante considerar esta variable, dado

Tabla 5. Evidencias de las respuestas de los grupos en cada categoría.

Categoría	Grupo	Evidencia	Estrategia
C <sub>1</sub>	G <sub>2</sub>	<p><u>Promedio =</u>                      en la tercera nota dice "gana aquel competidor que en bolitas, en                      sus, cuando el promedio de cada y sumas los 2 resultados = (el promedio                      de los cinco bolitas = 16 y 16)</p> <p><u>Dados</u>                      12 — 14 — 16 — 18 — 20 = 16                      3            2            1            2            3</p> <p><u>Reserva</u>                      11 — 14 — 18 — 18 — 19 = 16                      5            2            2            2            3</p> <p>Para que puntas a centro?                      porque dentro mas cerca del N° promedio mas una diferencia =</p> 	<p>Estrategia 1:                      Suma la distancia de cada ju-                      gada respecto a la media                      obtenido por cada competi-                      dor, y luego compara ambos                      resultados.</p>
C <sub>2</sub>	G <sub>4</sub>	<p>Cuando Pedro porque la mediana que da en esos lanzamientos                      está más cercana al promedio de todas las bolitas.</p> <p><math>1x = 14 - 16 - 18 - 20</math>  <math>11 = 14 - 18 - 19 - 19</math> } Mediana</p>	<p>Estrategia 2:                      Compara valores particula-                      res del conjunto de datos, con                      alguna medida de tendencia                      central.</p>

	G <sub>5</sub>	<p>* Pedro tendio a estar mas cerca de la medicina 16, mientras que maria obtuvo medicina 18</p> <p>* En el gráfico Pedro calculo sus lanzamientos y fueron constantes</p> <p>* en el gráfico maria intento calcular para obtener medic. 15, pero desafortunadamente se le refugio 18</p> <p>* Pedro obtuvo lo que queria</p> <p>* Por el promedio no se pudo saber el ganador por lo cual se utilizo la mediana</p> <p>* Pedro gano por que se aproximó mucho mas a 15</p>	
C <sub>2</sub>	G <sub>6</sub>	<p>* Como Pedro porque el promedio entre lanzamientos entre ambos es de 16 y el único que le atinó a ese nivel.</p> <p><math>P = 80 : 5 = 16</math></p> <p><math>M = 80 : 5 = 16</math></p> 	Estrategia 2 (cont.): Compara valores particulares del conjunto de datos, con alguna medida de tendencia central.
	G <sub>7</sub>	<p>Al sumar la bola número 10 y 20, nos da 30 y al dividirlo el promedio nos da 15, para lo mismo. En el caso de Pedro y Maria, en el caso de Pedro si suma la bolita 12 y 20 nos da 32 y al dividirlo nos da 16. En el caso de Maria el número 11 y el 19 nos da 30 y al dividirlo nos da 15, igual que el promedio del total</p>	

<p>C<sub>3</sub></p>	<p>G<sub>1</sub></p>	<p><i>Posterior mente calculamos las distancias de los lanzamientos todos respecto al promedio (16).</i></p>  <p><i>Según los promedios obtenidos anteriormente, llegamos a la conclusión de que el promedio menor (2,4) está a una menor distancia de la meta (16).</i></p> <p>3 - 2 = -2 - 2 = -5    <math>\bar{X} = 2,8</math></p>	<p>Estrategia 3:                  Determina la media de las distancias de los lanzamientos de cada jugador respecto a la media. El vencedor es que obtenga menor valor.</p>
<p>C<sub>4</sub></p>	<p>G<sub>3</sub></p>	<p><i>Pero si ampliamos ese rango de ganador hacia ambos lados llegando al triple, P ahora tiene 4 lanzamientos de 5 en esa área y María solo 3, 0 sea Pedro sigue ganando.</i></p> 	<p>Estrategia 4:                  Representa los lanzamientos de ambos jugadores en una recta con todos los posibles resultados, y los compara con respecto a la media de la serie inicial.</p>

que las investigaciones reportan las dificultades en la comprensión de las medidas de dispersión, sin embargo, apreciamos una carencia de tipos de lenguajes usados por los estudiantes para comunicar su respuesta. Se detecta, además, dificultades en la construcción de gráficos (Figura 4), lo que repercute en la respuesta a la situación didáctica.

En cuanto al lenguaje, entendido como la forma en que se comunica mediante términos, expresiones, símbolos, notaciones, tablas, etc. el enunciado, el procedimiento y la solución de un problema matemático (Godino, 2003), consideramos que presenta diversas dificultades (Figura 4). Por ejemplo, el gráfico () construido por  $G_5$  presenta errores en su construcción que dificultan la visualización de la información, impidiendo extraer conclusiones que permitan resolver la situación. También evidenciamos, prácticamente una ausencia de lenguaje algebraico, el que se demuestra en la simbología utilizada, la que no obedece a un criterio apropiado. Esta situación genera una alerta por la edad de los estudiantes.

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En nuestros resultados, coincidimos con las dificultades evidenciadas en diferentes investigaciones (Garfield y Ben-Zvi, 2008; Orta y Sánchez, 2013), en relación a que los estudiantes utilizan estrategias en que sólo toman en cuenta un valor particular de la serie de datos y lo comparan con medidas de tendencia central (Tabla 5). Pareciera ser que los aprendices tienen impedimento en realizar comparaciones de grupos de datos, en que consideren cada grupo como una unidad. En nuestro caso, lo atribuimos a que, a la fecha de implementación del diseño, solo conocían las medidas de centralización y el rango, de allí que se limitaran en aplicar conceptos conocidos, evitando explorar otras estrategias que les permitieran responder de manera apropiada a la situación.

El abordar la enseñanza de la dispersión no es tarea sencilla, dado que se carece de una comprensión profunda de estos conceptos, a pesar de la importancia que poseen en la inferencia estadística. Lamentablemente, en muchos lugares, estos conceptos sólo son abordados por medio de la aplicación de fórmulas, sin darle el sentido e interpretación apropiada.

Evidenciamos que el uso del lenguaje algebraico es escaso en los estudiantes, pues, es generalmente propio del docente, que es en muchos casos el encargado de entregar la definición y fórmula. Se considera apropiado incentivar el uso de diversas formas de lenguaje en los objetos estadísticos.

La propuesta, compuesta de cuatro etapas, ofrece un diseño para profesores factible de replicar en sus aulas, lo que permite a los estudiantes acercarse al concepto de dispersión. Así se pretende orientar el actuar del docente en cuanto a su labor, y potenciar las devoluciones en el proceso de enseñanza, dado que, en una primera instancia, los estudiantes tienden a responder que hay más variabilidad o dispersión en un conjunto de datos basados por sus conocimientos comunes que por un conocimiento estadístico.

Respecto a las respuestas, las estrategias que utilizaron los estudiantes fueron diferentes, en su mayoría parcialmente correctas, pues contenían errores (en cálculos o en gráficos); otras estrategias correctas fueron el uso de intervalos centrados en la media de la

**Tabla 4.** Clasificación de los tipos de lenguajes utilizadas por los grupos.

Lenguaje	Grupo	Total de estudiantes
L <sub>1</sub> : El estudiante utiliza el lenguaje natural.	G <sub>1</sub> , G <sub>2</sub> , G <sub>3</sub> , G <sub>4</sub> , G <sub>5</sub> , G <sub>6</sub> y G <sub>7</sub>	35
L <sub>2</sub> : El estudiante utiliza el lenguaje gráfico.	G <sub>1</sub> , G <sub>3</sub> , G <sub>5</sub> , G <sub>6</sub> y G <sub>7</sub>	25

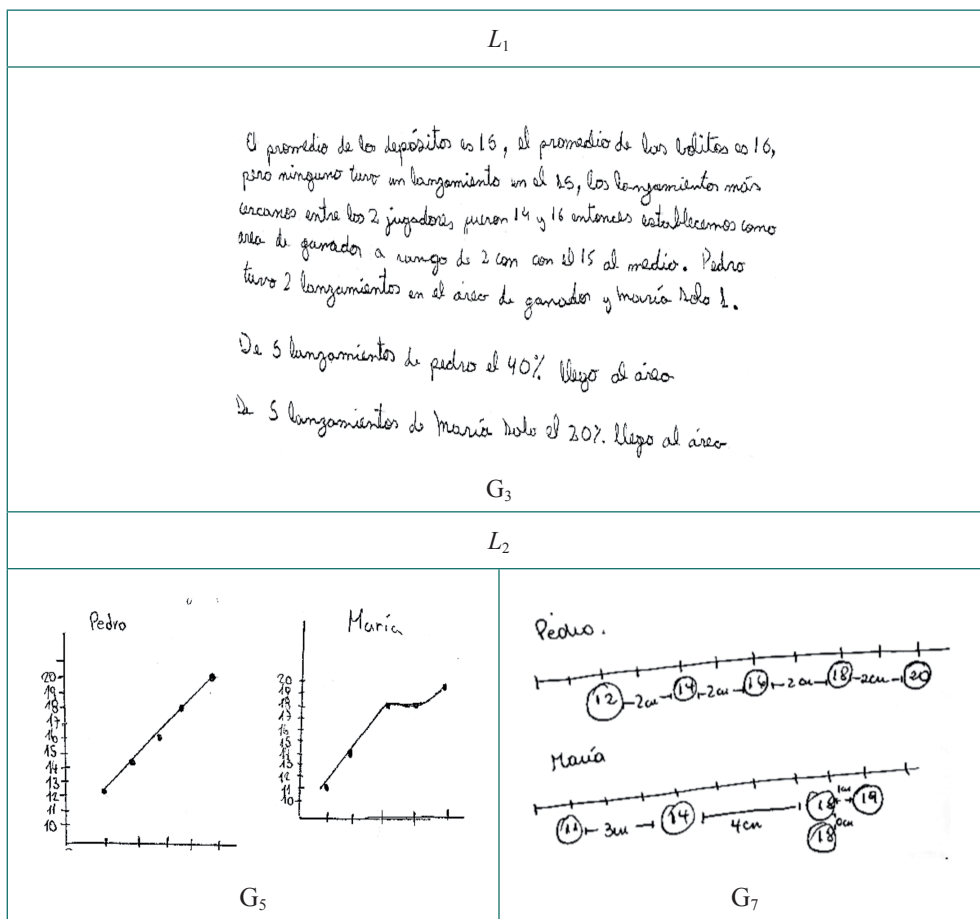


Figura 4. Ejemplos de tipos de lenguaje utilizados

serie inicial de datos. Es conveniente señalar que la mayor parte de los estudiantes, vinculó su respuesta con alguna medida de tendencia central como la mediana o la media.

Finalmente, las producciones de los estudiantes informan de las ideas que poseen sobre la dispersión, en su mayoría incompletas, pero evidencian que el concepto es

intuitivo y, por tanto, puede facilitar el estudio de otras medidas como la varianza y la desviación estándar.

## BIBLIOGRAFÍA

- Acosta, M., Monroy, L. y Rueda, K. (2010). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio. *Revista Integración*, 28 (2), 173–189.
- Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido*. Madrid: Akal Ediciones.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M., y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números. Revista de didáctica de las Matemáticas*, 83, 7-18.
- Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R. y Holmes, P. (1994). Errors and difficulties understanding statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.
- Batanero, C., López-Martín, M., González-Ruiz, I. y Díaz-Levicoy, D. (2015). Las medidas de dispersión en el estudio de la inferencia estadística. En Vásquez, C., Rivas, H., Pincheira, N., Rojas, F. (Eds.), *XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 312-316). Sociedad Chilena de Educación Matemática: Villarrica.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Cobb, G. W., y Moore, D. S. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American Mathematical Monthly*, 104(9), 801-823.
- Estepa, A., y Del Pino, J. (2013). Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística. *Números, Revista de didáctica de las Matemáticas* (83), 43-63.
- Farfán, R. (1997). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Garfield, J., y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. New York: Springer.
- Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Recuperado el 20 de agosto del 2018 de: <https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf>
- Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Ghiglione, R. y Matalón, B. (1989). *Las encuestas sociológicas*. México: Trillas.
- Mayring, P. (2000). Qualitative content analysis. *Forum qualitative social research*, 1(2), 159-176.
- MINEDUC (2015). *Bases curriculares 7° básico a 2° medio*. Santiago: Ministerio de Educación.

- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Orta, J.A. y Sánchez, E. (2013). Interpretación de la dispersión de datos en contexto de riesgo por estudiantes de secundaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 421-430). SEIEM: Bilbao.
- Sánchez, E. S. (2013). *Elementos de estadística y su didáctica a nivel bachillerato*. México: Secretaría de Educación Pública, Subsecretaría de Educación Media Superior.
- Sánchez, E., Borim, C., y Coutinho, C. (2011). Teachers understanding of variation. En C. Batanero, G. Burril, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI Study* (pp. 211-222). Springer: The Netherlands.
- Silva, C. y Coutinho, C. (2008). Reasoning about variation of a univariate distribution: a study with secondary mathematics teachers. En Batanero, C., Burrill, G., Reading, C. y Rossman, A. (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education: Monterrey.
- Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-248.



## Enseñanza de fractales a partir de preguntas: descripción de una experiencia en un curso de matemática del último año de la escuela secundaria

Nadia Belén Martín

*Equipo Técnico Regional (ETR) del Centro de Investigación  
e Información Educativa (CIIE). Buenos Aires, Argentina*

Verónica Parra, María de los Ángeles Fanaro

*Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires  
(UNCPBA. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y  
Técnicas (CONICET)*

**Resumen:** *Este trabajo describe una experiencia de aula realizada en un curso de Matemática del último año del nivel secundario argentino. La experiencia aborda la enseñanza de fractales mediante la implementación de una actividad de estudio e investigación (AEI), generada a partir de la pregunta ¿Cómo se construye un fractal teórico? El referente teórico es la teoría antropológica de lo didáctico (TAD). La descripción realizada indica que es posible involucrar a los estudiantes en un proceso de estudio proponiendo la formulación de preguntas y la búsqueda de respuesta a partir de un trabajo colectivo.*

**Palabras clave:** *Enseñanza, fractales, escuela secundaria, AEI, TAD.*

## Teaching fractals from questions: description of an experience in a mathematics course in the last year of high school

**Abstract:** *This work describes a classroom experience in a Mathematics course in the last year of the Argentine secondary level. The experience deals with the teaching of fractals through the implementation of a study and research activity (SRA). The activity was generated from the question: How is a theoretical fractal constructed?*

*The theoretical reference is the anthropological theory of the didactic (ATD). The description done indicate that the students and the teacher were involved in a study process incorporating the formulation of questions and the search for answers based on collective work.*

**Keywords:** *Fractals teaching, secondary school, SRA, ATD.*

## INTRODUCCIÓN

La experiencia de aula que describimos aquí es parte de una investigación que diseñó e implementó un dispositivo didáctico para enseñar Fractales en la escuela secundaria. En la revisión bibliográfica realizada para delimitar esta experiencia, por un lado, hemos identificamos que los trabajos de investigación referidos a propuestas de aulas y talleres abordan la enseñanza de fractales, en su mayoría, desde un enfoque “tradicional”. Con enfoque “tradicional” nos referimos a que las propuestas plantean una metodología donde el profesor explica ciertas nociones en torno a la geometría fractal y los estudiantes las “aplican”. Últimamente se están difundiendo trabajos que apuntan a promover una enseñanza de la Matemática que revalorice su funcionalidad (por ejemplo, véase Moreno Ferrari, 2017; Martín, 2015). Por otro lado, la mayoría de los trabajos que analizamos en esta revisión no se encuentran delimitados por un marco teórico-didáctico a partir del cual fundamentan sus propuestas. En ambos sentidos, describimos aquí una experiencia de aula que ha sido concebida a partir del marco teórico de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), adoptando el dispositivo didáctico denominado actividades de estudio e investigación (AEI), cuya principal característica es oponerse al enfoque tradicional de la enseñanza de la matemática.

Las AEI se gestan a partir de uno de los postulados de la TAD que asumen que la enseñanza de la matemática se encuadra en un nuevo paradigma, denominado de la investigación y del cuestionamiento del mundo (PICM), cuyo objetivo primordial es establecer una relación funcional con el saber (Chevallard, 2013). Se propone que el saber se construye a partir de la generación de duplas de preguntas y respuestas. Se propone partir de una pregunta denominada generatriz involucrando a la comunidad de estudio en un proceso cuyo producto es la construcción de repuestas. El calificativo “generatriz” refiere a capacidad de generar numerosas cuestiones derivadas cuya respuesta no baste con la búsqueda de información, sino que es necesario construir y/o reconstruir obras matemáticas y/o de cualquier otra disciplina.

En este trabajo describimos parte de la experiencia de aula al implementar una AEI en el último año del nivel secundario argentino que se inicia con la pregunta Q: ¿Cómo se genera un fractal teórico? Q se presenta a los estudiantes a continuación de haber trabajado en otra AEI que introducía el estudio de los fractales. La elección de Q se justifica porque ésta posibilita abordar un amplio conjunto de organizaciones matemática: autosimilitud, dimensión fractal, área de superficies planas, perímetro de superficies planas, procesos iterativos, semejanza, números complejos, función iterativa, sucesiones, entre otras que exceden al análisis en este trabajo. Esta AEI privilegia el estudio de los procesos iterativos ya que la generación de un fractal teórico matemático se define como la repetición constante de un cálculo simple (iteración).

Este modelo de repetición permite realizar una aproximación a la gráfica de un fractal, que solo es realizable a través del uso de la computadora que ejecuta iteraciones de procesos algebraicos que resultan imposibles de llevar a cabo con las herramientas tradicionales debido a la complejidad, el número de cálculos y el tiempo que requiere esta tarea.

## CONTEXTO DE IMPLEMENTACIÓN

La institución en la que se realizó la experiencia es una escuela de gestión pública ubicada en una zona rural de la provincia de Buenos Aires, Argentina. Esta institución fue seleccionada por tres razones: porque tiene una dinámica de enseñanza tradicional, porque una de las investigadoras estaba a cargo de la materia Matemática de 6° año y porque al presentar el proyecto hubo un gran interés y predisposición por parte de la institución para que se implemente la actividad. El curso se componía de trece estudiantes cuyas edades oscilan entre 17-19 años.

Durante experimentación de la AEI, participaron en el aula dos profesoras y los estudiantes se organizaron en grupos de estudio de 3-4 integrantes. Una de las profesoras participó en carácter de profesora de la clase, y la otra como observadora no participante. La AEI tuvo una duración de seis sesiones de clase (de 120 minutos de duración cada una) y se registró, cada una de ellas, en audios generales (no audios de cada grupo). La profesora no participante tomó notas de campo antes y luego de cada clase y se recolectaron las producciones escritas de los estudiantes clase a clase. Estos últimos registros son el foco de nuestra descripción, la cual se centra no en una descripción clase a clase sino en términos de preguntas formuladas y el proceso de construcción de respuestas.

## DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE ESTUDIO EN FUNCIÓN DE LAS PREGUNTAS Y RESPUESTAS

En la introducción de este trabajo se indicó que la pregunta *Q*: *¿Cómo se genera un fractal teórico?* se presentó a los estudiantes luego de haber trabajado en otra AEI, la cual introducía el estudio de los fractales. Así, al introducir *Q*, la profesora propuso a los estudiantes que, antes de buscar información para intentar responder *Q*, formularan y anotaran las preguntas que se harían a partir de ella. Así, se registraron las siguientes preguntas derivadas, las cuales se transcriben tal y como fueron redactadas por los estudiantes: *¿Qué herramientas o elementos se necesitan para generar un fractal?*, *¿Tiene una fórmula matemática?*, *¿Qué es lo que queremos construir?*, *¿De qué manera construimos un fractal?*, *¿Cómo está compuesto?*, *¿Para qué sirven?*, *¿Cuáles son los pasos para construirlo?*, *¿Toda persona puede construir un fractal?*, *¿Qué tipos de fractales existen?*, *¿Qué conocimientos tenemos que tener para construir un fractal?*, *¿Qué ventajas y desventajas tiene la construcción de un fractal?*, *¿Los fractales tienen una fórmula matemática?* De este conjunto de preguntas, la profesora y estudiantes acordaron responder la siguiente:

**Parte a:** Observar las siguientes iteraciones y construir el término siguiente. Describe el proceso de construcción. (De esta secuencia resulta el fractal denominado “Triángulo de Sierpinski”).

Iteración 0                      Iteración 1                      Iteración 2                      Iteración 3

**Parte b:** A partir de la construcción anterior, completar la tabla siguiente:

Iteración $n$	Cantidad de triángulos blancos	Comparando con iteración anterior
0	$f(0) =$	
1	$f(1) =$	$f(1) = f(0)$
2	$f(2) =$	$f(2) =$
3	$f(3) =$	$f(3) =$
$n$		

**Parte c:** Describe el proceso que permitió arribar a los resultados vertidos en la tabla.

Figura 1. Actividad 1

- $Q_0$ : ¿Los fractales tienen una fórmula matemática?

Para abordar  $Q_0$  la profesora entregó a cada grupo la Actividad 1<sup>1</sup> (Figura 1), y les recordó que podían escribir todas las preguntas que les surjan en cualquier momento del proceso. La primera parte de la Actividad 1 propone recuperar el Triángulo de Sierpinski, y la propiedad de autosimilitud del fractal. El objetivo de esta actividad es introducir a los estudiantes en la noción de funciones iterativas a través del proceso de construcción geométrica de un fractal. La segunda y tercera parte de la Actividad tiene por objetivo relacionar la cantidad de triángulos blancos con la noción de funciones iteradas. Se completa observando las iteraciones anteriores hasta generalizar que  $f(n)$  es el resultado de multiplicar  $f(n-1)$  por tres.

Cada grupo (G) de estudiantes (E) trabajó en la actividad durante 45 minutos y luego, se difundieron sus respuestas construídas. Todos los estudiantes pudieron dibujar correctamente la tercera iteración (inciso a), sin embargo, en la descripción del proceso de dicha construcción, dos no contestaron (E3, E9), cinco lo hicieron de forma poco desarrollada (E4, E5, E6, E7, E8) y sólo dos (E1, E2) lo resolvieron en forma completa. A continuación, se presenta un fragmento de resolución, representativo de este tipo de respuestas. Se presenta (Figura 2) la construcción realizada por E1, quien además de haber contestado de forma completa, hace referencia a “figuras congruentes”, “autosimilar”, “triángulo equilátero” o “aplicar una misma transformación sucesivamente”.

1. Esta actividad se contempla en el denominado modelo praxeológico de referencia (MPR). Este modelo, definido en el marco de la TAD, permite anticipar los posibles recorridos que pueden desarrollarse a partir de una pregunta generatriz y su construcción es vital en una enseñanza de este tipo.

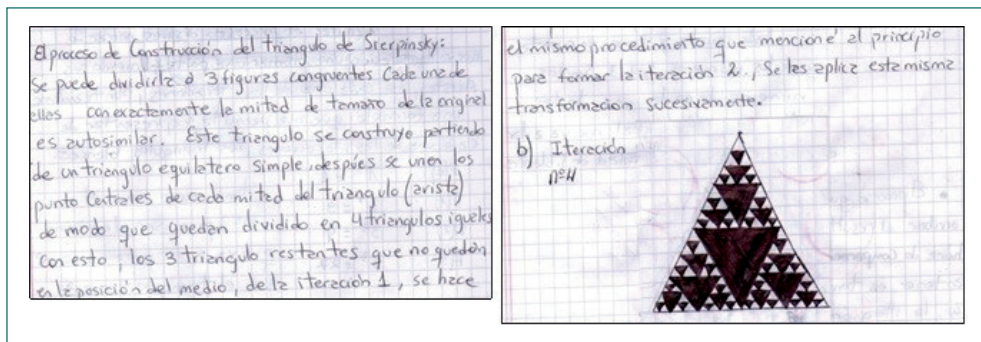


Figura 2. Resolución de E1

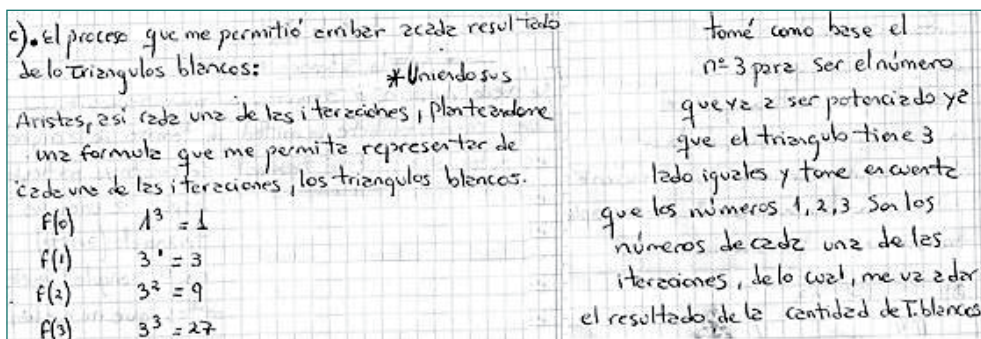


Figura 3. Resolución de E1

La segunda parte de la actividad propone la construcción de una tabla cuyo objetivo es relacionar la cantidad de triángulos blancos que resultan de cada iteración con las funciones iteradas. Se completa observando las iteraciones anteriores hasta generalizar que  $f(n)$  es el resultado de multiplicar  $f(n-1)$  por tres. Todos los estudiantes resolvieron sin dificultades las primeras cuatro filas, salvo E1, quien no completó correctamente la columna donde se compara con la iteración anterior, a pesar de que explicó detalladamente el proceso de construcción de cada iteración en función de las aristas de los triángulos en blanco y justificó el uso de la base 3 a partir de los lados del mismo (Figura 3).

Los estudiantes realizaron diferentes resoluciones para completar la última fila de la tabla – correspondiente a la iteración  $n$ , que conduce a la generalización de la expresión de la función iterativa para determinar la cantidad de triángulos blancos que resultan de cada iteración – pero ninguno obtuvo una generalización. En general los estudiantes le asignaron un valor a  $n$ , el que correspondería a la iteración siguiente, ( $n=4$ ). Por ejemplo, E2 de G1 dividió la última fila en 2 columnas como estaba en las filas anteriores, y le asignó a  $n$  el valor 4, es decir, consideró a  $n$  como la iteración 4, como se muestra en la Figura 4.

Luego de esta puesta en común se decidió retener una pregunta, que emergió de esa misma puesta en común, para continuar el proceso de estudio:

b) Completa la tabla.

Iteración $n$	Cantidad de triángulos blancos	Comparando con iteración anterior
0	$f(0) = 1$	
1	$f(1) = 3$	$f(1) = f(0) \cdot 3$
2	$f(2) = 9$	$f(2) = f(1) \cdot 3$
3	$f(3) = 27$	$f(3) = f(2) \cdot 3$
$n$	$F(n) = 81$	$F(n) = F(3) \cdot 3$

c) Describe el proceso que te permitió arribar a cada resultado.

$F(n) = F(n-1) \cdot 3$  - fórmula para calcular la cant. de

*dporga sigue ser el anterior es cual*

*No es correcto*

Figura 4. Resolución de E2

Los fractales matemáticos... no todos cumplen la misma función o características, aunque hay algo en común: Son el producto de la repetición de un proceso geométrico donde tienen una longitud infinita.

Los fractales lineales: Son aquellos que se construyen con un cambio en la orientación de sus escales, son idénticos en todas sus escales hasta el infinito.

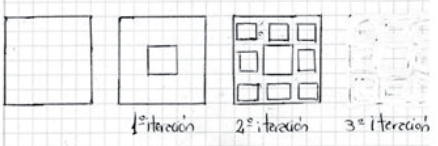
Los fractales no lineales: Se generan creando distribuciones no lineales o complejas. Es decir son fractales que presentan una estructura similar, pero no son exactamente igual a su original.

Hay muchos de Fractales matemáticos: el Cuadro de Cantor.

- Triángulo de Sierpinski
- Tetraedro de Sierpinski
- El alfombrado de Sierpinski
- La esponja de Menger

Un tetraedro es un poliedro de 4 caras, con este número de caras he de ser un poliedro y sus caras triangulares, en cada vértice. Son equilateros.

"El Alfombrado de Sierpinski"



Se lo define en forma recursiva:

1. Comenzamos con un cuadrado base.
2. El cuadrado se corta en 9 cuadrados congruentes y eliminamos el cuadrado central.
3. El paso anterior vuelve a aplicarse recursivamente a cada uno de los 8 cuadrados restantes.

El Alfombrado de Sierpinski es límite de este proceso tras un número infinito de iteraciones.

\* El poliedro: Son caras planas (figuras) donde se clasifican como regulares, el Tetraedro.

Fractales matemáticos - El conjunto de Julia (no lineal)

- El conjunto de Mandelbrot
- El conjunto de Cantor
- La curva de Peano
- La curva de Hilbert

Preocupación: ¿el fractal de Sierpinski?

Figura 5. información de G1

• ¿Qué tipo de fractal es el triángulo de Sierpinski?

Los estudiantes realizaron una búsqueda en Internet concluyendo que se trata de un fractal matemático. En esa búsqueda surgió la cuestión referida a los tipos de fractales que pueden existir. Así, se decidió entonces avanzar el proceso a partir de la pregunta ¿Qué tipo de fractales matemáticos existen? Los estudiantes buscaron información en Internet y luego de 45 minutos, se realizó una puesta en común. Esta búsqueda se centró en los fractales lineales y no lineales, en su representación, generación y la identificación de algunos ejemplos de cada tipo. G1 describió qué tienen en común los fractales matemáticos, indicando que son el producto de la repetición de un proceso geométrico

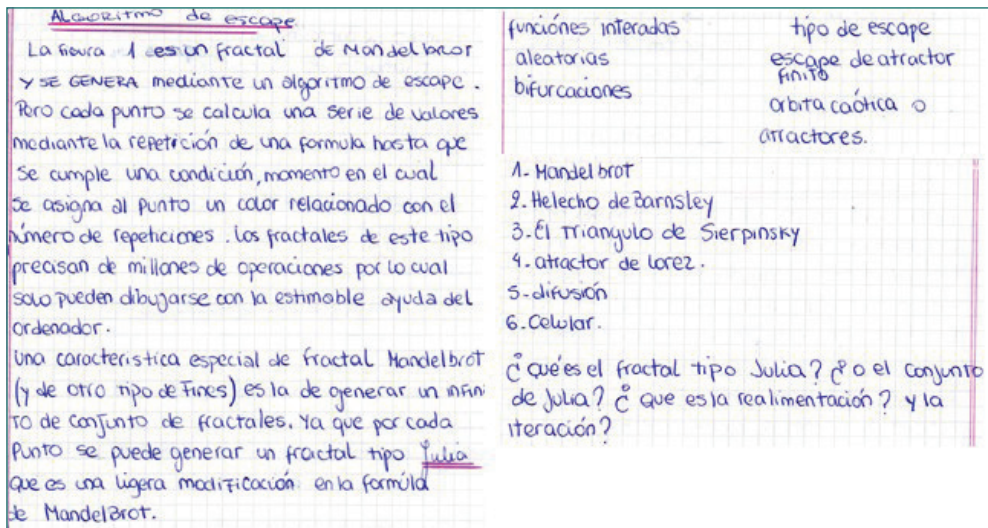


Figura 6. Información de G3

elemental, y realizó una clasificación de fractales, en lineales y no lineales, con una breve explicación sobre la construcción y las características de autosimilitud de los mismos. Además, se nombraron algunos ejemplos de fractales lineales. G1 realizó una representación sobre la construcción de la Alfombra de Sierpinski, explicitó algunas características y realizó nuevos cuestionamientos tales como colocar los signos de interrogación sobre la palabra “poliedro” y explicitar bajo el rótulo de “pregunta generada” ¿el fractal de Lyapunov? (Figura 5). A continuación, se muestra un fragmento de la información registrada por G1.

G2 también formuló nuevas preguntas, ¿Cuántos fractales temáticos hay?, ¿Qué función cumplen los fractales?, ¿Cómo se puede expresar la línea de Koch? y ¿Qué son las funciones holomorfas? En forma de ítems, nombró algunos fractales sin desarrollar ninguna característica (triángulo de Sierpinski, fractal de Newton y el Conjunto de Mandelbrot y de Julia) y diferentes dimensiones (Fractal, Topológica, Hausdorff-Besicovitch). G3 describió cómo se genera el Conjunto de Mandelbrot a través de algoritmos de escape y su relación con fractales del tipo Julia. Además, enumeró conceptos relacionados con fractales matemáticos, como *funciones iteradas, aleatorias, bifurcaciones, algoritmos de escape, escape de atractor finito, órbita caótica o atractores, Mandelbrot, Helecho de Barnsley, el triángulo de Sierpinski, atractor de Lorez, difusión y celular*. También realizó otras preguntas, ¿Qué es el fractal tipo Julia?, ¿O el Conjunto de Julia?, ¿Qué es el fractal?, ¿Qué es la retroalimentación?, ¿Y la iteración? A continuación, se muestra un fragmento de la información de G3 (Figura 6)

A partir de esta información de G3 y durante la puesta en común, se formuló la pregunta ¿qué es el conjunto de Mandelbrot? La profesora propuso formular preguntas a partir de la anterior, obteniendo las siguientes: ¿Qué es el conjunto de Mandelbrot? ¿Qué es una iteración compleja? ¿Qué es el algoritmo de escape? En esta instancia, la profesora decidió continuar con el Conjunto de Mandelbrot para orientar el proceso de estudio

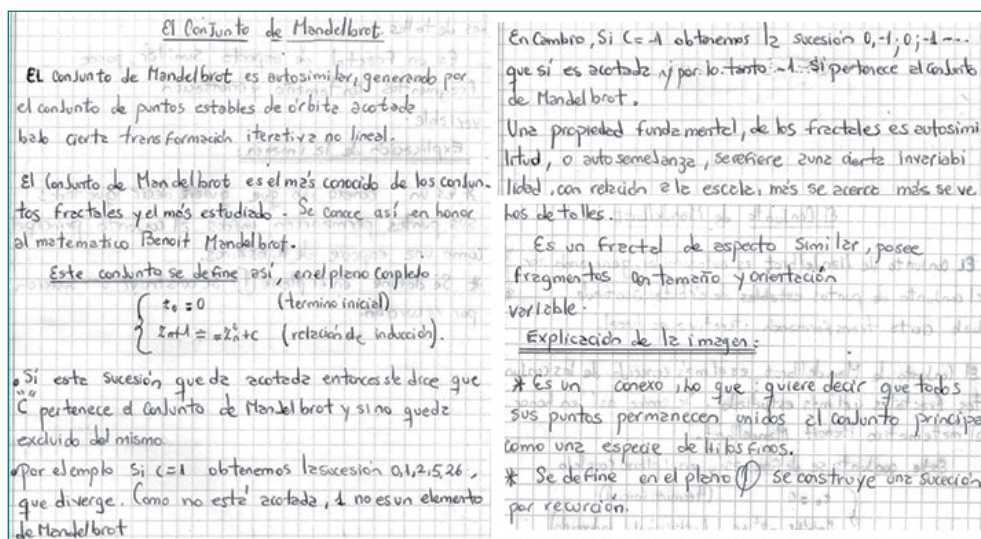


Figura 7. Información de G1

hacia un fractal no lineal, y vincularlo con la autosimilitud, dimensión fractal, área de superficies planas, perímetro de superficies planas, semejanza, ecuaciones exponenciales, y sucesiones. En esta clase predominó la puesta en común de la información obtenida en Internet y la formulación de nuevas preguntas a partir de esa información. Cada grupo registró, no sólo lo obtenido en su propia búsqueda sino también, lo acordado colectivamente. La siguiente clase la profesora retomó la cuestión:

- ¿Qué es el conjunto de Mandelbrot?

Se propuso buscar información en Internet para responder esta pregunta y luego, se realizó la difusión de las respuestas aportadas por cada uno. La figura 7 muestra un fragmento de esta respuesta.

G2 registró que el conjunto de Mandelbrot es uno de los más conocidos y que contiene a todos los conjuntos Julia (Figura 8). Además, que el conjunto de Mandelbrot es conexo y formularon la pregunta ¿Qué significa ser "conexo"? G3 describió al conjunto de Mandelbrot de forma muy similar a G1. Un estudiante se refirió a la pregunta ¿cuánto mide la costa de Inglaterra?, realizada por el matemático Benoit Mandelbrot. G3 comenzó la puesta en común planteando que no entendió la información que encontró y solicitó a la clase si no se podía "construir una definición" (del Conjunto de Mandelbrot) para todos por igual.

Se realizó un registro común de la información más relevante obtenida por cada grupo para dar respuesta a la pregunta ¿Qué es el Conjunto de Mandelbrot? y se acordó registrar que:

- El conjunto de Mandelbrot es el conjunto de números complejos para los cuales el método iterativo no tiene fin.
- Es un fractal autosimilar formado por el conjunto de puntos estables cuya órbita es acotada bajo cierta transformación iterativa no lineal.

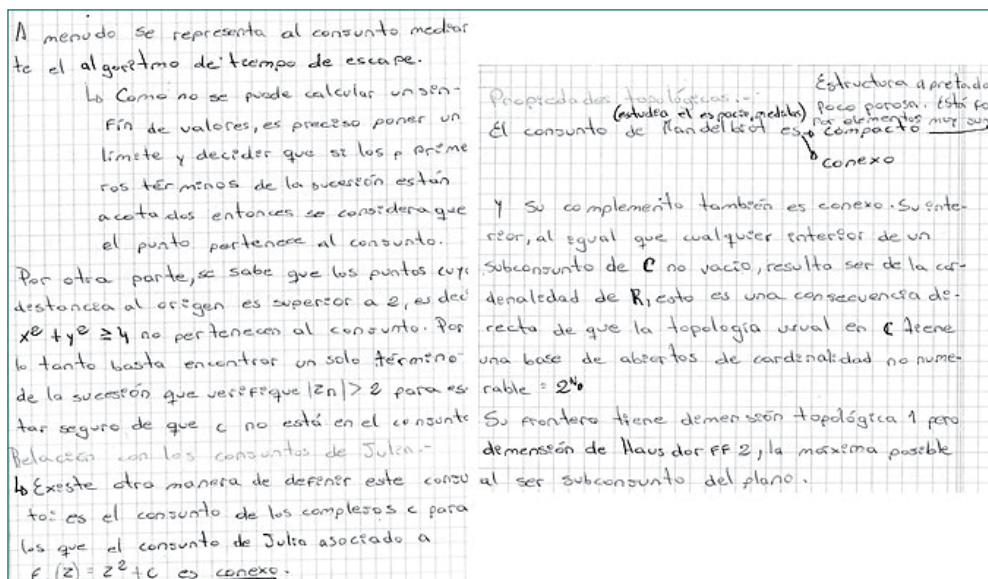


Figura 8. Información de G1

- El conjunto se define en el plano complejo y se construye una sucesión por

$$\text{recursión: } \begin{cases} Z_0 = 0 \\ Z_{n+1} = Z_n^2 + c \end{cases}$$

En esta clase predominó no sólo la puesta en común de la información obtenida en Internet y la formulación de nuevas preguntas, sino también la selección de lo que fue considerado relevante por cada grupo para construir la respuesta a la pregunta relativa al Conjunto del Mandelbrot. La búsqueda de respuestas a esta pregunta condujo a la formulación de otras preguntas tales como *¿Qué significa que el conjunto sea “conexo”?* Luego, en las siguientes sesiones se trabajó con el conjunto de Mandelbrot y se lo caracterizó (autosimilar, conexo, compacto). Finalmente se lo definió a través de la sucesión por recursión.

## CONSIDERACIONES FINALES

El objetivo de esta experiencia fue introducir, a través de una AEI, una manera diferente de estudiar fractales, alejándose de la forma “tradicional”. No se realizó este estudio sólo a través de las imposiciones de ejercicios por parte del profesor, sino a partir de un proceso conformado casi en su totalidad por la formulación de preguntas y de búsqueda de respuestas. Se priorizó avanzar en el proceso a partir de las cuestiones formuladas por los estudiantes, ya sea durante las puestas en común como en los registros de sus producciones. Asumimos que para la pregunta inicial  $Q_0$ : *¿Los fractales tienen una fórmula*

*matemática?* no se construyó una respuesta propiamente rotulada como tal, pero permitió generar otras preguntas y estudiar e investigar en función de ellas. Esta AEI permitió encontrar a los estudiantes con conceptos que supone el estudio de fractales teóricos, como la autosimilitud, la dimensión, procesos iterativos o su representación.

Esta forma de trabajo fue compleja tanto para la profesora como para los estudiantes. La profesora debió enfrentar sus propias concepciones signada fuertemente por el paradigma tradicional de la enseñanza de la matemática. La experiencia significó aprender a delegar responsabilidades en el proceso de estudio, a dar lugar a los estudiantes, y a generar un clima de confianza donde el estudiante se anime a generar respuestas y a formular preguntas. En esta propuesta los estudiantes también se enfrentaron a sus propias concepciones, construida también a lo largo de su escolaridad, sobre lo que implica el estudio de la matemática y fueron los protagonistas en la implementación de la AEI formulando sus propias preguntas y aportando respuestas, superando la resistencia inicial a este tipo de trabajo.

Los resultados de esta experiencia alientan a seguir en esta línea, es decir, en la del paradigma de la PICM. Se propone volver a implementar esta propuesta con mayor tiempo en el calendario escolar, de manera que se puedan profundizar y articular mejor las organizaciones matemáticas.

## REFERENCIAS

- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (2013). *La matemática en la escuela. Por una revolución epistemológica y didáctica*. CABA: Libros del Zorzal.
- Martín, N. (2015). *Diseño e implementación de una Actividad de Estudio e investigación a partir de la pregunta ¿Cómo se construye un fractal teórico?* Tesis de licenciatura. UNICEN. [en línea] Recuperado el 3 de febrero de 2016, de <http://ridaa.unicen.edu.ar/xmlui/handle/123456789/554>
- Moreno Ferrari, P.C. (2017). Un Sierpinski en la fachada. *Épsilon Revista de Educación Matemática*. 96, 45-60.

## Cómo las matemáticas nos pueden salvar de un apocalipsis zombie....

Fernando Arribas Ruiz  
María del Carmen Galán Mata  
Jaime González Cimas  
Álvaro Luque Borrego  
(IES AVERROES)

**Resumen:** *En un grupo con bastante alumnado de bajo nivel y motivación para las matemáticas se plantea una actividad contextualizada en un ataque zombie. Ésta les exige cálculos geométricos y sobre todo estrategias para optimizar su aula como un refugio, entre otros retos. Se consigue así un aprendizaje significativo, simpatía hacia la materia y fortaleza en varias competencias clave.*

## How mathematics can save us from a zombie apocalypse....

**Abstract:** *In a group with several students who have low abilities and motivation for mathematics, we have proposed an activity which is contextualized in a zombie attack. This requires them to make geometrical calculations and above all strategies to optimize their classroom as a refuge, among other challenges. Thus, significant learning, sympathy towards the subject and strength in several key competences is achieved.*

### INTRODUCCIÓN

El equipo de profesores de Matemáticas que llevamos a cabo este proyecto, estamos convencidos de la importancia y conveniencia que sigue teniendo hoy en día la reflexión que llevó a cabo el filósofo francés del Renacimiento, Michel de Montaigne, en el siglo XVI:

El niño no es una botella que hay que llenar, sino un fuego que es preciso encender.

En un momento, este comienzo de siglo, en el que cuando nos referimos a crisis en la educación ya no pensamos en la forma ineficiente con que la educación cumple con sus objetivos, sino en que ni siquiera estos se distinguen con nitidez. Así, por ejemplo, ¿se debe priorizar la cohesión social o la autonomía del individuo? ¿Debe ser el sistema educativo neutral ante la pluralidad religiosa, sexual, ideológica o debe razonar la que es preferible? ¿Es todavía obligatorio que todos los ciudadanos y ciudadanas reciban la misma educación, o debería diferenciarse según las prioridades de cada familia?

Frente al abismo que supone asomarse al bosquejo de respuestas posibles que ofrece cada pregunta, nadie duda de que el ser humano, formando parte de la naturaleza, no está determinado por ella. Es decir, no podemos únicamente “llenarlo” con conocimientos, será necesario además animarle, estimularle, avivar su curiosidad, como si de un fuego se tratase, estimulando su libertad para forjar su destino.

Tal vez este artículo desborde entusiasmo o peque de ser excesivamente optimista, pero es que a un enseñante se le presupone el optimismo valiente como un esquiador necesita la nieve para deslizarse. Porque ser enseñantes requiere creer en el ser humano y en su capacidad de aprender, con tesón y con deseo. Y en que los seres humanos podemos mejorarnos y “avivarnos” los unos a los otros.

Nota previa: absténganse los cobardes, ¡que vienen los zombies!.

## MARCO LEGAL

Por un lado, el *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato* establece, dentro de los Objetivos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria, entre otros, los siguientes:

- f)** Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
- g)** Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.

Por otro lado, la *Orden del 14 de julio de 2016, por la que se establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía* recoge en su artículo 4 una serie de recomendaciones de metodología didáctica, que serían, entre otras:

- a)** El proceso de enseñanza-aprendizaje competencial debe caracterizarse por su transversalidad, su dinamismo y su carácter integral.
- b)** Los métodos deben partir de la perspectiva del profesorado como orientador, promotor y facilitador del desarrollo del alumnado.
- d)** Las líneas metodológicas de los centros docentes tendrán la finalidad de favorecer la implicación del alumnado en su propio aprendizaje, estimular la superación individual, y los procesos de aprendizaje autónomo, y promover hábitos de colaboración y de trabajo en equipo.

- f) Se estimulará la reflexión y el pensamiento crítico en el alumnado, así como los procesos de construcción individual y colectiva del conocimiento.

Y dentro de los Objetivos de Matemáticas en la ESO nos encontramos con los siguientes:

- 3) Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor; utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
- 5) Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno; analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
- 6) Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.), tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar información de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
- 8) Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

## EL PROBLEMA

Planteamos la posibilidad de un Apocalipsis Zombie. Ante el éxito televisivo de numerosas series, libros y cómics sobre el tema, y el interés que éste suscita en nuestro alumnado, decidimos que era el entorno idóneo para plantear una actividad final del bloque de Geometría. Además, se abre un amplio abanico de problemas, no solo matemáticos, si no problemas que aborden numerosos ejes transversales, que pueden surgir con el telón de fondo de los zombis: supervivencia, refugios, recorridos, solidaridad, etc.

Empezamos la actividad poniendo en práctica nuestros dotes de actores y actrices, y, muy serios, les decimos que nos han llegado noticias muy preocupantes. Fuentes fidedignas nos avisan de un inminente Apocalipsis Zombie y que la sociedad, tal y como la conocemos hoy en día, quedará arrasada. Pero no todo está perdido, aún hay tiempo para construir un refugio antizombies en el aula con el fin de salvar al mayor número de personas posible.

## LA SOLUCIÓN

*¿Cuántas personas podemos salvar?*

El alumnado comienza la actividad identificando la forma del aula (rectangular) y midiendo el largo y el ancho para calcular su área. Posteriormente nos damos cuenta de que se pierde espacio con las mesas y las sillas ¿cuánto espacio?. Veamos. Calculamos el



Figura 1

área de una mesa y el alto, medimos también el alto del aula para calcular cuántas mesas podemos apilar, y con un sencillo cálculo determinamos que en nuestra aula se precisan cuatro filas de mesas, tres de ellas con cuatro mesas y una fila con tres, ya que hay exactamente quince mesas. Con un planteamiento similar calculamos también el área que se perderá con las sillas. Sumando ambas y restándole el resultado al área total tenemos el área que queda disponible para ocupar. Necesitamos saber cuántas personas pueden ocupar ese espacio, y para ello medimos in situ un metro cuadrado en el suelo del aula y vemos cuántas personas caben en ese metro cuadrado. Ya solo nos queda multiplicar el número de personas por metro cuadrado por el número total de metros cuadrados de la clase.

### *Que los zombis no nos vean....*

Pero estas medidas son insuficientes, ya que los zombis pueden vernos a través de las ventanas, y, como todo el mundo sabe, si nos ven querrán atacarnos. Necesitamos calcular cuántos metros cuadrados de tela opaca necesitamos para poder tapar las ventanas y que nuestra vida no corra peligro. Una sencilla operación (medir las ventanas, calcular el área y multiplicar por el número de ventanas que hay) nos dará la solución.

### *Ayudamos a los que se han quedado fuera...*

Una vez a salvo recibimos el whatsapp de un compañero, se ha quedado fuera y debe llegar a tiempo al refugio, ya que los zombis le persiguen. Cogemos el plano de la planta



Figura 3

donde se halla el aula (en cada clase hay uno) y trazamos el recorrido más corto desde el punto donde se encuentra el compañero (en la puerta principal) hasta el aula. Y, utilizando la escala del plano, finalmente le decimos los metros que debe recorrer. Puede salvarse.

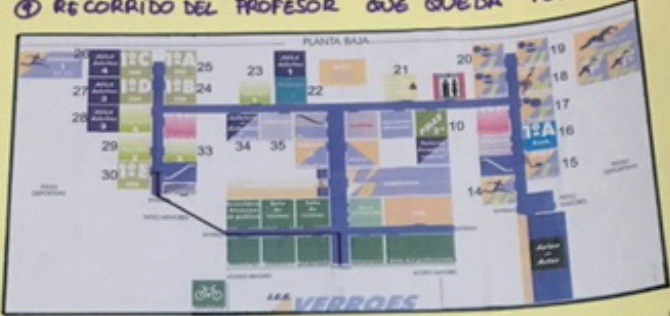
### *Fuera de peligro...*

Una vez pasado el peligro queremos remodelar la clase, y para ello tenemos varios presupuestos para renovar las baldosas del aula (precio por metro cuadrado, otros por baldosa y otros por cajas de un número determinado de unidades de una medida), y tenemos que calcular que precio debemos pagar por el aula, en función de los metros cuadrados que tiene.

## **LA EXPERIENCIA**

La experiencia con el alumnado de primero de ESO ha sido muy gratificante, aunque nos hemos encontrado con varios obstáculos. El primero de ellos es que nuestro alumnado pocas o ninguna vez se ha enfrentado al problema de medir una longitud grande con instrumentos de medida. Utilizan de forma habitual la regla en sus actividades y en su cuaderno de matemáticas, pero no están acostumbrados a medir más allá de 50 cm. Hemos visto muchas dificultades a la hora de medir el largo o el ancho de la clase, como por ejemplo el metro volando haciendo un arco hasta alguien que lo sujeta para medir y se mueve, dando un error importante. Otro gran problema es que no saben interpretar los datos de la realidad. A la hora de calcular el área varios grupos multiplicaban el ancho de la clase por la altura hasta el techo, ya que el área de un rectángulo es

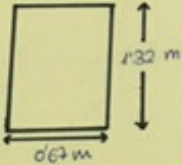
⑨ RECORRIDO DEL PROFESOR QUE QUEDA FUERA



Recorrido : 13 cm en el plano  $\rightarrow 13 \cdot 534'6 = 6950'6$  cm realidad

DEBE RECORRER 69'51 m

⑩ HACEMOS CORTINAS PARA TAPAR VENTANAS



Área =  $1'32 \cdot 0'67 = 0'8844 \text{ m}^2$   
 Hay 8 cristales  $\rightarrow$  Necesitamos  $7'075 \text{ m}^2$  de tela

⑪ LO SERÍA NUEVA DESPUÉS DEL APOCALIPSIS

THE WALKING LOSA'S	ZOMBILOSA
$A = 0'2^2 = 0'04 \text{ m}^2$	$A = 0'15^2 = 0'0225 \text{ m}^2$
$49'48 : 0'04 =$	$49'48 : 0'0225 =$
1237 Losas	2199'1 losas
Precio = $1237 \cdot 0'50$	Precio = $2200 \cdot 0'45$
= 618'5 €	= 990 €




Figura 2

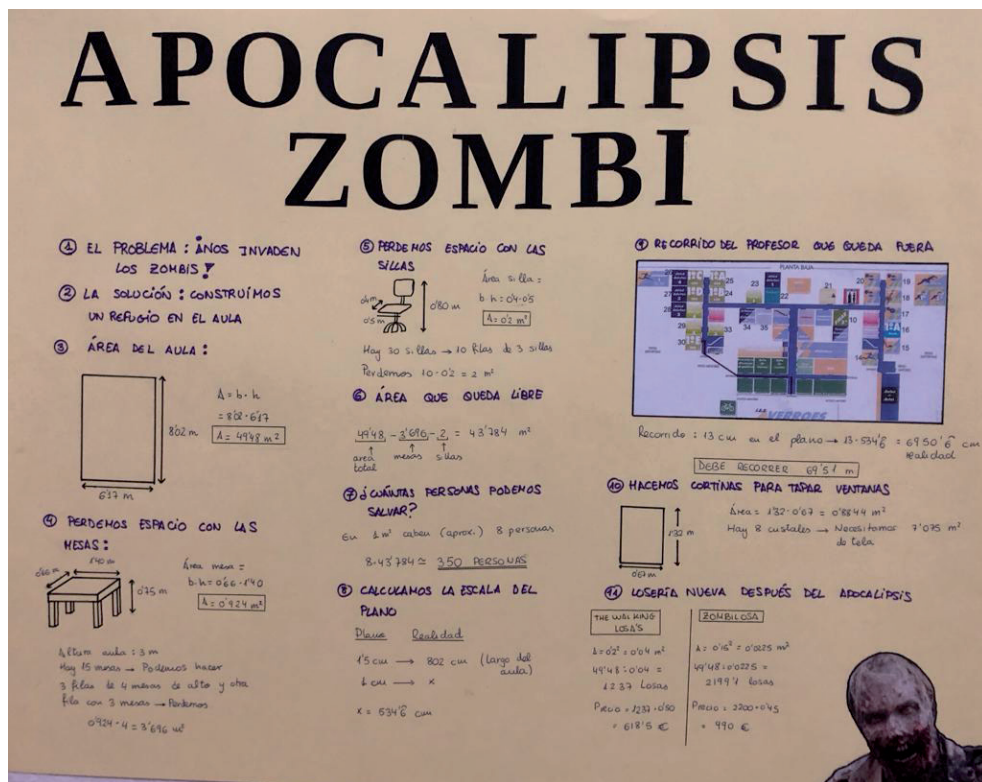


Figura 4

base por altura, y la altura será la altura de la clase, ¿verdad maestro?. Una vez tomadas las medidas, tarea nada fácil por estos y otros motivos, vamos con las unidades. Somos especialmente cuidadosos con este tema en los ejercicios que hacemos en clase, y rara vez se han equivocado al respecto en ejercicios tradicionales. Sin embargo, raro fue el equipo que hizo bien la toma y operaciones con datos en las mismas unidades. Lo normal era dar el área del aula en metros cuadrados y luego el área que se pierde en mesas y sillas en centímetros cuadrados, con lo cual al restar obtenían un número negativo. Error fácil de subsanar y de comprender por parte del alumnado, aunque algo desesperanzador para nosotros, ya que algo que hacían bien en actividades hipotéticas hacían mal con medidas reales.

A pesar de todos los inconvenientes que surgieron debemos decir que fue una actividad que el alumnado acogió con mucha ilusión, y en la que estuvieron muy motivados. Nos ayudó a conocerles mejor y a poner en práctica la teoría que muchas veces solo ven en papel o en libros de texto. En definitiva ha sido una actividad que sin lugar a dudas repetiremos en cursos sucesivos y que nos ha encantado llevar a cabo con nuestro alumnado.

Mostramos una de las cartulinas con el trabajo final desarrollado por un grupo de alumnos y alumnas:

## REFERENCIAS

- Savater, F. (20089). *El valor de educar*. Madrid: ARIEL.
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*
- Orden del 14 de julio de 2016, por la que se establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía*
- <http://iesaverroes.org/2018/12/13/apocalipsis-zombie/>

## La modelización matemática a través de las actividades generadoras de modelos: una propuesta para el aula de secundaria

César Trelles-Zambrano

*Universidad de Cuenca, Ecuador*

Ximena Toalongo

*Universidad de Girona, España*

Ángel Alsina

*Universidad de Girona, España*

Neli Gonzáles

*Universidad de Cuenca, Ecuador*

**Resumen:** *La modelización matemática como herramienta didáctica está cada vez más presente en los documentos curriculares de diferentes países, frente a ello surge la necesidad de dotar al profesorado de los conocimientos necesarios para poder llevarla a las aulas. Si bien son varias las propuestas y enfoques para poder ponerla en práctica, en este trabajo abordamos las actividades que generan modelos, también conocidas como Actividades Reveladoras de Pensamiento (Model-Eliciting Activities o MEAs, por sus siglas en inglés), presentando los aspectos más importantes que consideramos que el profesorado de Educación Secundaria debe conocer acerca de las mismas, así como algunos ejemplos para facilitar su aplicación, con el propósito de contribuir al desarrollo profesional del profesorado de matemáticas.*

**Palabras clave:** *Modelización matemática, Actividades Reveladoras de Pensamiento, práctica matemática, desarrollo profesional, Educación Secundaria.*

## The Mathematical Modelling through Model-Eliciting Activities: A proposal for the secondary classroom

**Abstract:** *Mathematical modeling as a didactic tool is increasingly present in curricular documents from different countries, as opposed to the need to provide teachers with*

*the necessary knowledge to be able to take it to the classroom. While there are several proposals and approaches to put it into practice, in this work we address the MEAS presenting the most important aspects that we consider that Secondary Education teachers should know about them, as well as some practical examples that can be applied, with the purpose of contributing to the professional development of mathematics teachers.*

**Keywords:** *Mathematical Modeling, Model-Eliciting Activities, Mathematical Practice, Professional Development, Secondary Education.*

## INTRODUCCIÓN

En los últimos años la incorporación de la modelización matemática en los planes de estudio de diferentes países ha cobrado especial protagonismo, debido principalmente al papel cada vez más importante que juega tanto en aplicaciones de la vida real (ingeniería, ciencias de la vida, ciencias sociales, etc.) como dentro de la propia educación matemática (Trelles-Zambrano y Alsina, 2017). Para Kaiser, Blomøj y Sriraman (2006) la modelización matemática, junto con la introducción de la tecnología de la información, es probablemente uno de los rasgos comunes más prominentes en los planes de estudio de matemáticas alrededor del mundo en las últimas décadas.

En este sentido, reconocidas organizaciones a nivel mundial establecen en sus documentos, ya sea de forma explícita o implícita, la importancia que merece la modelización matemática en los procesos de enseñanza aprendizaje.

Así, por ejemplo, para la Organization for Economic Cooperation and Development (OECD, 2017) la competencia matemática como la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos, incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Se considera que ello ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan.

Además, una de las siete capacidades fundamentales de acuerdo al planteamiento de la OCDE tiene que ver con la matematización, en la que se indica que la competencia matemática implica transformar un problema definido en el mundo real a una forma estrictamente matemática, lo que puede incluir estructurar, conceptualizar, hacer suposiciones y/o formular un modelo, o a su vez interpretar o evaluar un resultado o modelo matemático en relación con el problema original.

Por su parte el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989) en *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, asumió la necesidad de desarrollar la comprensión de modelos matemáticos aplicables a una variedad de disciplinas, y las orientaciones curriculares hacían hincapié en que contenidos matemáticos como los patrones y funciones, la estadística y la probabilidad o bien la geometría no deberían centrarse en la memorización, sino que deberían servir sobre todo para modelizar, describir, analizar, evaluar y tomar decisiones sobre situaciones problemáticas. Desde entonces, el NCTM en sus diferentes documentos ha tenido siempre presente la importancia de la modelización matemática en los procesos de enseñanza y aprendizaje, asumiendo que

un modelo matemático se refiere a la representación matemática de los elementos y relaciones en una versión idealizada de un fenómeno complejo, y señalan que todos los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para usar representaciones que permitan modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

Sin embargo, a pesar de lo dicho anteriormente, consideramos que aún falta por desarrollar y/o divulgar propuestas concretas de cómo el profesorado puede utilizar la modelización matemática como una herramienta didáctica que contribuya al desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes. En este sentido, el presente trabajo pretende ser un aporte que permita llevar los planteamientos de la modelización matemática a las aulas.

## LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Hasta el momento no existe en la literatura un criterio unificado para definir la modelización matemática y su epistemología, por lo que es imprescindible elegir desde qué mirada se estudia este proceso. En nuestro caso reconocemos la modelización matemática desde una perspectiva educacional ya que valoramos la importancia de la misma como estrategia didáctica. Para Kaiser y Sriraman (2006) la perspectiva educacional persigue objetivos pedagógicos y disciplinares, tanto en la estructuración de los procesos de aprendizaje como en la introducción y el desarrollo de conceptos.

Si bien no existe una manera única para describir la modelización matemática, algunos autores realizan algunos aportes interesantes. La modelización matemática es un proceso que utiliza la matemática para representar, analizar, hacer predicciones o proporcionar información sobre los fenómenos del mundo real y realizar un proceso de traducción entre este mundo y las matemáticas (Bliss y Libertini, 2019; Blum y Borromeo, 2009). Hablar de modelización matemática en la enseñanza significa proporcionar a los estudiantes problemas suficientemente abiertos y complejos en los que puedan poner en juego su conocimiento previo y sus habilidades creativas para sugerir hipótesis y plantear modelos que expliquen el fenómeno en cuestión mediante revisión, reflexión, aplicación y comunicación de resultados (Trigueros-Gaisman, 2006).

## EL CICLO DE MODELIZACIÓN

Existe un consenso en la literatura de que la modelización matemática es un proceso no lineal, consecuentemente, varios son los autores (Carreira, Amado y Lecoq, 2011; Girnat y Eichler, 2011; Kaiser, 1995) entre otros, que han realizado planteamientos de que los procesos de modelización matemática se desarrollan a través de ciclos. Si bien las diferentes propuestas tienen características similares, en este trabajo asumimos el ciclo propuesto por Blum y Leiß (2007) (figura 1).

Este planteamiento indica que a partir de la situación ocurrida en el mundo real (a) se trabaja para comprender el problema (1), este hecho genera un modelo conceptual (b) en el pensamiento de los estudiantes. Simplificar y estructurar (2) hace referencia a

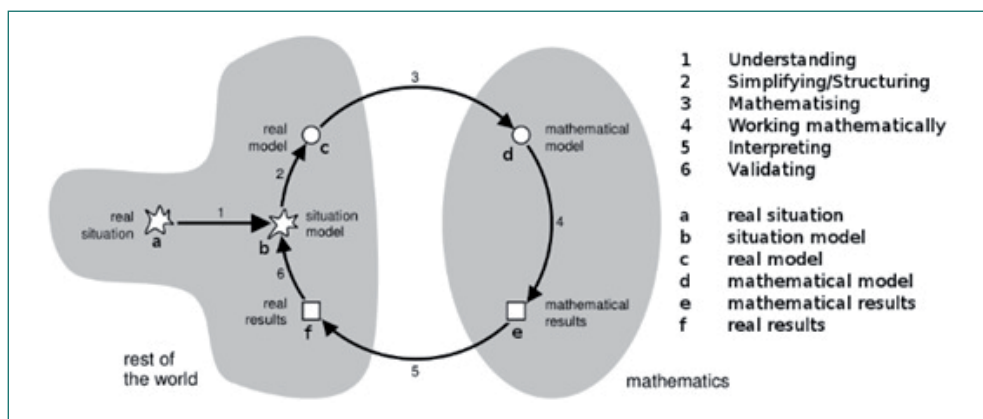


Figura 1. Ciclo de modelización matemática de Blum y Leiß (2007).

identificar variables y/o condiciones que conllevan a un modelo real (c). A través de la matematización (3) se llega al modelo matemático (d) el cual es una expresión en matemáticas formales de las relaciones existentes entre las variables, sin perder de vista las condiciones del problema. Luego se realiza un trabajo matemático (4) hasta conseguir resultados matemáticos (e) que luego serán interpretados (5) en términos de resultados reales (f) para seguidamente validarlos (6) comparándolos con el modelo conceptual (b).

Es importante resaltar que este proceso es no lineal y que en la práctica los estudiantes pueden ir de un punto a otro del esquema sin necesidad de seguir un orden establecido, precisamente ese camino de ida y vuelta les permitirá ir afinando el modelo buscado. Finalmente es importante que los estudiantes socialicen el modelo con sus compañeros, recojan las observaciones pertinentes y realicen los ajustes necesarios con el objetivo de mejorar el modelo.

## ACTIVIDADES QUE GENERAN MODELOS

Si bien son diferentes las propuestas para llevar a cabo los procesos de modelización matemática en las aulas (Albarracín, 2017; Ferrando y Navarro, 2015; Gallart, García-Raffi, Ferrando, 2019; Sierra-Galdón et al., 2011; Sol y Rosich, 2011) entre otros, consideramos importante explotar las bondades que presentan las actividades que propician modelos, también llamadas Actividades Reveladoras del Pensamiento, conocidas en la literatura como (MEAs) por sus siglas en inglés.

## ¿QUÉ SON LAS MODELING-ELICITING ACTIVITIES?

Las MEAs son actividades no tradicionales que, partiendo de una situación real, plantean problemas abiertos, desafiando a los estudiantes a construir un modelo con el

objetivo de solucionar el problema (Lesh y Doerr, 2003; Lesh, Hoover, Hole, Kelly y Post, 2000).

Se emplean fundamentalmente con dos objetivos: 1) preparar el terreno necesario antes de la introducción de nuevos conceptos, y/o 2) fomentar en los estudiantes un aprendizaje más profundo que conlleve a transferir ese aprendizaje a otros contextos reales.

Estas actividades, desarrolladas fundamentalmente por Lesh y su equipo, tienen las siguientes características principales: se trabajan en grupos pequeños de estudiantes, de tres a cuatro como máximo, y pueden durar entre dos o tres sesiones de clase; en muchos de los casos se solicita a los estudiantes que mediante una carta brinden asesoría a una persona para resolver el problema en cuestión. En esta carta deben indicar como han llegado a la solución, porque es útil su planteamiento y cómo este podría servir incluso en otros contextos.

La puesta en marcha de la actividad consta de tres fases diferenciadas:

1. Realización de una lectura y contestación de preguntas guías: se sugiere que esta parte sea individual y que, preferentemente, se realice de forma previa a la clase (por ejemplo, en casa o bien en sesiones dedicadas a trabajo individual).
2. Socialización de las respuestas a la lectura en cada grupo de trabajo: el objetivo es que cada alumno escuche el planteamiento de sus compañeros y pueda considerar aspectos que a lo mejor no consideró en sus respuestas iniciales (duración aproximada 15 min). Luego se entrega la actividad en sí, y la función del maestro en esta parte es interactuar con cada grupo y observar detenidamente los procesos de pensamiento de los alumnos, ofreciendo ayudas solamente cuando sea necesario pero sin dar soluciones al problema.
3. Puesta en común de las soluciones de cada grupo: el maestro puede elegir al azar un miembro del grupo para que exponga la solución a la que han llegado. Después de haber escuchado las soluciones de sus compañeros, cada grupo puede refinar sus modelos si así lo desean considerando aspectos que a lo mejor no fueron considerados previamente.

Un aspecto muy importante a considerar es que al tratarse de un problema abierto, este tipo de actividades no contienen respuestas únicas y por lo tanto todas las respuestas son válidas, simplemente algunas serán más eficientes que otras. La esencia de la actividad no es en sí la respuesta, lo más importante de todo es el proceso para llegar a la recomendación que se da al usuario mediante la carta. Se otorga también mucha importancia a la argumentación acerca de la validez del modelo.

## **PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LAS MEAs**

Los seis principios fundamentales que deben cumplir este tipo de actividades (Lesh et al., 2000) son:

- Principio de construcción: Los problemas deben estar diseñados de tal forma que permitan la creación de un modelo que utilice elementos, las relaciones y

operaciones entre estos elementos, las reglas y patrones que rijan estas relaciones, los alumnos deben cuantificar, identificar patrones, hacer predicciones, etc.

- Principio de realidad: Los problemas deben ser pertinentes y relevantes para los estudiantes, preferentemente con datos reales o ligeramente modificados, se recomienda utilizar una lectura preparatoria con preguntas que acerquen a los alumnos al tema.
- Principio de autoevaluación: Conforme trabajan en la solución, los alumnos deben poder autoevaluarse determinando la utilidad de sus soluciones. El enunciado del problema debe indicar claramente ciertos criterios que permitan evaluar el grado de utilidad de una solución.
- Principio de documentación: Los alumnos deben poder documentar sus procesos de pensamiento dentro de su solución, los productos que generen deben mostrar objetos estadísticos o construcciones que fueron realizadas, así como las relaciones entre estos objetos y estas construcciones.
- Principio del prototipo efectivo: Se trata de que el modelo producido sea lo más simple posible pero matemáticamente significativo.
- Principio de generalización: Busca que las soluciones creadas por los estudiantes se puedan generalizar o al menos adaptarse fácilmente a otras situaciones o contextos.

## **EJEMPLOS DE ACTIVIDADES GENERADORAS DE MODELOS**

Se presentan dos ejemplos de actividades que pueden ser directamente aplicadas en el aula. Para su diseño se han tenido en cuenta que se trate de situaciones que despierten el interés de los estudiantes, y despierte la necesidad de encontrar una respuesta.

### **Situación 1: Venta de coches**

La figura 2 muestra la lectura introductoria para la primera actividad.

En la figura 3 se presentan las preguntas que permiten controlar la comprensión de la lectura anterior.

Y en la figura 4 se presenta el enunciado de la actividad de modelización.

### **Situación 2: las tarifas eléctricas**

La figura 5, 6 y 7 muestran la lectura introductoria, las preguntas de comprensión y la segunda actividad de modelización respectivamente.

## **LAS VENTAS DE COCHES BAJAN EN TODO EL MUNDO POR PRIMERA VEZ EN 9 AÑOS**

El pasado año fue convulso para la industria automovilística, lo que ocasionó una caída en las ventas. Sin embargo, aumentó la demanda de coches eléctricos.



Tensiones comerciales entre las grandes economías mundiales, cambios en la futura normativa de comercialización y circulación de vehículos en algunos países, nuevas maneras de entender la movilidad... 2018 ha marcado un “cambio en la tendencia de ventas de la industria automovilística en el mundo: por primera vez en 9 años, las matriculaciones de coches nuevos descendieron”.

En total, en 2018 se matricularon en el mundo 86 millones de unidades de turismos y vehículos comerciales ligeros, lo que se traduce en una caída del 0,5% en comparación con los datos de 2007, según Jato Dynamics, proveedor de información para el análisis de tendencias en el mercado automovilístico.

### **Los grandes mercados, los que menos coches venden**

Las grandes economías mundiales han sido las que han reflejado las mayores caídas de ventas de coches. Así, China, el país en el que se comercializan más automóviles de todo el mundo, contabilizó 28,08 millones de turismos y vehículos comerciales ligeros vendidos; esta espectacular cifra, sin embargo, es un 2,8% inferior a la registrada en 2017.

Por su parte, Estados Unidos alcanzó los 20,86 millones de unidades de coches vendidos, un 0,2% menos que en 2017; Europa, 22,7 millones de unidades, Oriente Medio y África, un 1,1% menos; 10,6 millones de unidades en Asia-Pacífico, un 3,3% más; 5,1 millones de unidades en Japón, un 0,6% más; 4,3 millones de unidades en Sudamérica, un 7% más; y 1,7 millones de unidades en Corea del Sur, un 1,4% más.

Por fabricantes, Toyota, Volkswagen y Ford son los que ocupan los tres primeros puestos en número de vehículos vendidos en todo el mundo con 8,09; 6,7 y 5,3 millones de unidades comercializadas.”

### **Los vehículos eléctricos despegan en ventas**

Jato Dynamics también ha destacado en su informe el espectacular avance en las ventas de coches eléctricos. En total en 2018 se matricularon 1,26 millones de unidades, un 74% más que en 2017. Estos excepcionales resultados se deben a tres factores: la alta demanda de vehículos eléctricos en China, la llegada del Tesla Model S a los mercados y la crisis de los motores Diesel en los mercados europeos.

Los países donde más se comercializaron coches eléctricos en 2018 fueron China (769.000 unidades), EE. UU. (209.000 unidades), Noruega (46.000 unidades), Alemania (35.000 unidades) y Francia (35.000 unidades). Tesla fue la marca más vendida a nivel mundial seguida de BAIC, BYD, Nissan y Zoyte. Y los modelos más demandados, el tesla Model 3, BAIC EC, Nissan Leaf, Baojun E200 y Tesla Model S.

Fuente: <https://www.autopista.es/noticias-motor/articulo/ventas-coches-bajan-todo-mundo-primera-vez-9-años>

Figura 2. Noticia sobre la caída de las ventas de coche.

### **VENTAS DE COCHES: PREGUNTAS DE PREPARACIÓN**

1. ¿Sobre qué trata la noticia?

---

---

---

---

---

2. ¿De qué forma ha impactado la utilización del coche en el día a día?

---

---

---

---

---

3. Al hablar de coches, ¿Qué marcas conoces?, ¿Tienes coche?, ¿Qué tipo y marca de coche tienes?

---

---

---

---

4. En caso de no tener coche, ¿Qué marca comprarías y por qué?

---

---

---

---

Figura 3. Preguntas guía.

### COMPRA DE COCHE: EL CASO DE MARC

Marc es un abogado que inició su carrera a partir de los 25 años y después de años de experiencia logró consolidarse en este ámbito laboral. Se casó y juntamente con su esposa compraron un piso a través del Banco. Los fines de semana viajan continuamente con su esposa a diferentes lugares de la zona y comparten diversas aficiones como los deportes de aventura y la playa. Pasado un tiempo deciden que van a tener hijos y su sorpresa es que tendrán gemelos. Ante esta situación, tendrán que comprar un coche que se adapte a su realidad.

Marc sabe que su hipoteca con el Banco es por 30 años, y que al pensar en un coche deberá analizarlo con cautela porque su esposa estará en paro por algún tiempo y sólo él aportará con la nómina en casa. Por ello ha buscado información en internet y ha elaborado la tabla que se muestra abajo, con las principales características que debería tener el coche en beneficio de él y su familia. El problema es que no sabe cómo hacerlo y pide vuestra ayuda a través de una carta en la que expliquéis cuál sería la mejor opción de compra. Por otro lado, necesita que en esta carta generéis una estrategia que le permita añadir otros coches y de esta manera generalizar la idea que le permita optar por la mejor opción sin importar el número de coches que se añadan a la lista.

Desde ya Marc agradece vuestra ayuda, estará gustoso de leer y escuchar la explicación que podáis brindarle. Éxitos en vuestro trabajo.

Modelo	Consumo	Tipo de Combustible	Potencia	Maletero	Plazas	Precio
Mazda CX-5	5,0-7,1 L/100km	Gasolina	150-194CV	506-919 L	5	27270
Mitsubishi ASX	4,6-5,8 L/100km	Diésel	114-150CV	442-1219L	5	21700
Mercedes Clase A	3,9-7,3 L/100km	Gasolina	109-381CV	341-1210L	5	26525
Toyota Aygo	4,1-4,2 L/100km	Gasolina	72-72CV	168-198L	4	13190
Smart ForFour	0,0-4,3 L/100km	Eléctrico	71-90CV	185-975L	4	13325
Volkswagen Golf (215)	0,0-7,2 L/100km	Eléctrico/ Híbrido	102-310CV	272-1620L	5	20405

Fuente: Datos obtenidos de <https://www.autobild.es/coches>

Figura 4. Actividad de modelización matemática sobre coches.

## **EL IMPUESTO A LA GENERACIÓN ELÉCTRICA VUELVE Y LA FACTURA PODRÍA SUBIR 1 EURO**

El Gobierno de España ha puesto fin a una de las medidas adoptadas para paliar el impacto del precio de la luz y es más que previsible que se produzca un repunte en el recibo, de en torno al 2 o 3 %.



La suspensión temporal del impuesto sobre la generación eléctrica del 7 %, una de las medidas adoptadas por el Gobierno de España para paliar el impacto del alza del precio de la luz en los consumidores, finaliza este lunes. La ministra para la Transición Ecológica, Teresa Ribera, ha estimado que el fin de la suspensión temporal podría suponer un alza de entre “dos o tres puntos porcentuales”, lo que representará un encarecimiento en el recibo de la luz de “entre 0,5 y 1 euro por familia”.

El Gobierno español, en su real decreto-ley 15/2018, de 5 de octubre del año pasado, de medidas urgentes para la transición energética y la protección de los consumidores, exoneraba del impuesto sobre el valor de la producción de la energía eléctrica a la electricidad producida e incorporada al sistema eléctrico durante el último trimestre de 2018 y el primero de 2019.

Con esta norma el Ejecutivo español daba respuesta al fuerte repunte en agosto del precio de la electricidad, que en septiembre se disparó a máximos anuales.

En el mercado mayorista de la electricidad, donde las empresas casan sus ofertas, el precio medio mensual en septiembre fue de 71,27 euros el megavatio hora (MWh), con un máximo diario de 75,93 euros/MWh alcanzado el 19 de septiembre.

El encarecimiento del precio de los derechos de emisión del dióxido de carbono (CO<sub>2</sub>) y del gas natural y el carbón en los mercados internacionales fueron los principales causantes de la subida.

El Gobierno quiere en el futuro acabar totalmente con el impuesto a la generación eléctrica dentro de una reforma fiscal de la energía que ha estado preparando, descartando prorrogar su suspensión temporal en medio de una coyuntura preelectoral como la actual.

Fuente: <https://www.eitb.eus/es/noticias/economia/detalle/6306394/subida-electricidad-repunte-factura-luz-abril-2019/>

Figura 5. Noticia sobre las tarifas eléctricas.

### **IMPUESTOS A LA ELECTRICIDAD: PREGUNTAS DE PREPARACIÓN**

1. ¿Sobre qué trata la noticia?

---

---

---

---

2. ¿Qué creéis que sucederá una vez termine la suspensión temporal del impuesto sobre la generación eléctrica?

---

---

---

---

3. ¿Consideráis que las empresas y/o comercializadoras pueden realizar cualquier tipo de ofertas de energía sin importar el impacto que puedan generar en España?

---

---

---

4. ¿Por qué sería importante que se acabe de forma total con el impuesto a la generación eléctrica?, ¿sería positivo o negativo este impacto en el presupuesto familiar, por qué?

---

---

---

---

Figura 6. Preguntas guía sobre los impuestos a la electricidad.

## ¿QUÉ NOS CONVIENE?: EL CASO DE EMMA Y NEREA

Emma es una chica de 19 años que entrará a la universidad y como está lejos de su pueblo tendrá que mudarse a la ciudad donde funciona. Ella trabaja como dependienta en una tienda de ropa de su pueblo y ha pedido traslado para una de las sucursales que la tienda tiene en la ciudad. Durante los últimos 5 meses ha ahorrado un poco de dinero, pero está preocupada de que este dinero no sea suficiente para su nueva vida.

Ha conversado con una amiga y ésta le ha contado que tiene una prima que estudia en la ciudad y que ahora mismo tiene una habitación disponible en el piso que alquila para que pueda vivir junto con ella y así compartir gastos. A Emma le parece una idea perfecta y contacta con ella para concretar el trato.

Han pasado ya 6 meses de que Emma comparte piso con Nerea, en este tiempo se ha dado cuenta que el precio de la electricidad es alto y que sus ahorros y su nómina le van muy justos. El piso es de 50m<sup>2</sup>, cuenta con servicios básicos, tiene buena ventilación y está bien distribuido, tienen los electrodomésticos necesarios y no pasan mucho tiempo en el piso por razones de estudios y trabajo.

Emma ha conversado con Nerea y otros amigos para averiguar sobre las tarifas de luz y de esta forma no pagar demasiado, han buscado información en internet sobre compañías eléctricas (comercializadoras), para ello han elaborado una tabla con algunas características de luz. El problema es que no saben cómo elegir la mejor y piden vuestra ayuda a través de una carta en la que expliquéis cuál sería la mejor opción de tarifa y empresa. Por otro lado, necesitan que en esta carta generéis una estrategia que les permitan añadir otras empresas y de esta manera generalizar la idea que les permita optar por la mejor opción sin importar el número de empresas que se añadan a la lista.

Desde ya Emma y Nerea agradecen vuestra ayuda, estarán gustosas de leer y escuchar la explicación que podáis brindaros. Éxitos en vuestro trabajo.

Empresa	Mercado	Tarifa	Precio energía	Precio potencia	Permanencia	Discriminación horaria
Endesa	Libre	One Luz	0.1255€/kWh	3.429€/ KW	Sí	Sí
Lucera	Libre	Mismo Precio 24h-2.0A	0.12700€/kWh- 0.1042€/KW/ día	3.16€/kW	No	No
Iberdrola	Libre	Estable- 2.0DHA	0.1443€/kWh- 0.1233€/kW/ día	3.50€/kW	No	Sí
EDP	Libre	Fórmula Luz-2.0A	0.1474€/kWh- 0.1152€/kW/ día	3.50€/kW	Sí	Sí
holaluz	Libre	Tarifa sin sorpresas	0.1330€/kWh	3.170€/kW	No	Sí

Fuente: Datos obtenidos de <https://tarifaluzhora.es/comparador/tarifas-electricas>.



Figura 7. Actividad de modelización sobre tarifas de energía eléctrica.

## USO DE LA TECNOLOGÍA

Como elemento adicional, y considerando que al plantear este tipo de actividades en las aulas, en algunas ocasiones los modelos generados implican el uso de funciones, se propone usar el *software* Desmos, que entre sus principales ventajas destacan que es gratuito y además permite la posibilidad de observar en pantalla el trabajo de todos los estudiantes o de todos los grupos según sea el caso. Es importante mencionar que el software permite trabajar además varios contenidos matemáticos como: ecuaciones, sistemas de ecuaciones, inecuaciones, cónicas, entre otros.

Como primer paso se debe crear una cuenta en la página <https://teacher.desmos.com/> tal como se aprecia en la figura 8.

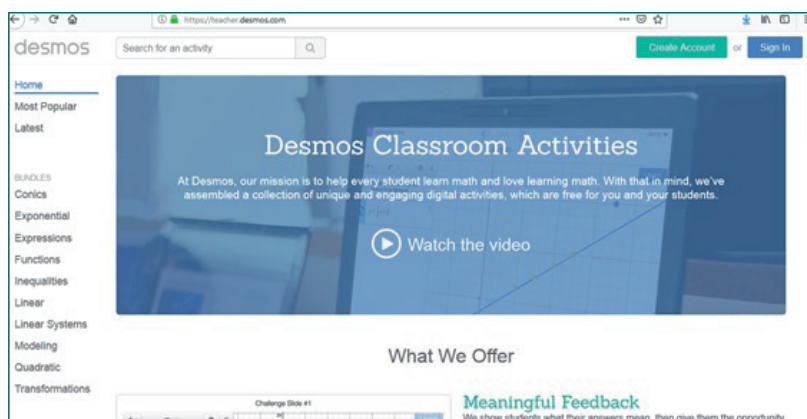


Figura 8. Página de inicio de Desmos.

Luego se puede crear una actividad dando clic primero en el botón *custom* y luego en el botón *New Activity*, tal como se presenta en la figura 9.

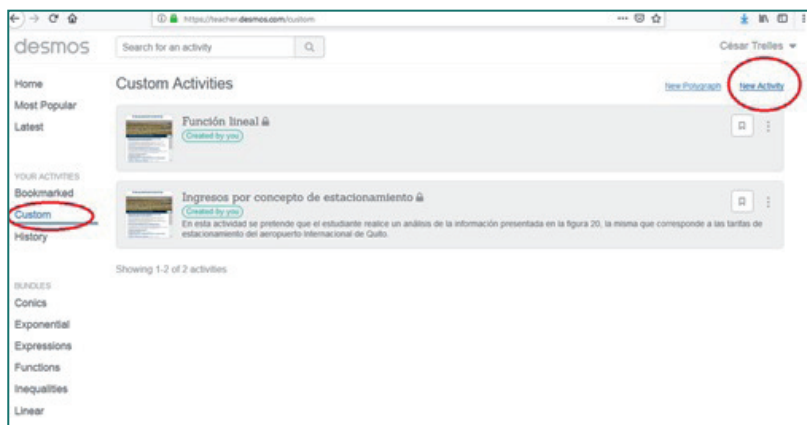


Figura 9. Página para crear actividades en desmos.

Después de agregar un título y de ingresar en las diferentes pantallas las instrucciones para los estudiantes, tenemos la posibilidad de generar un código de actividad, tal como se aprecia en la figura 10.

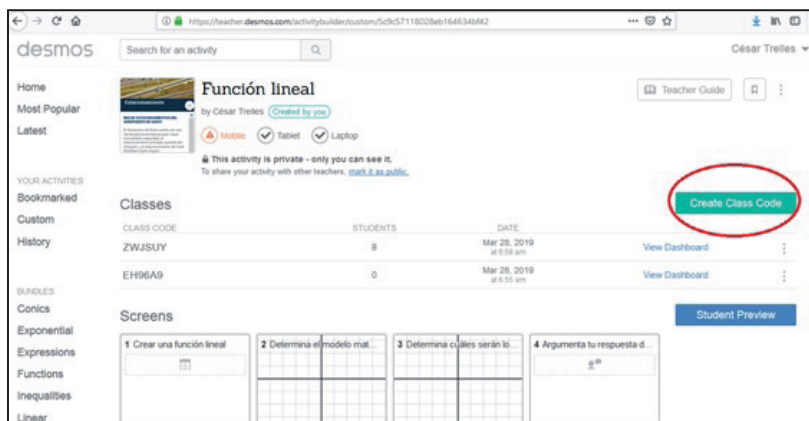


Figura 10. Generación de código de actividad en desmos.

El código generado les indicamos a nuestros estudiantes, los mismos que tienen que ingresarlo, (figura 11) accediendo a la página <https://student.desmos.com/>

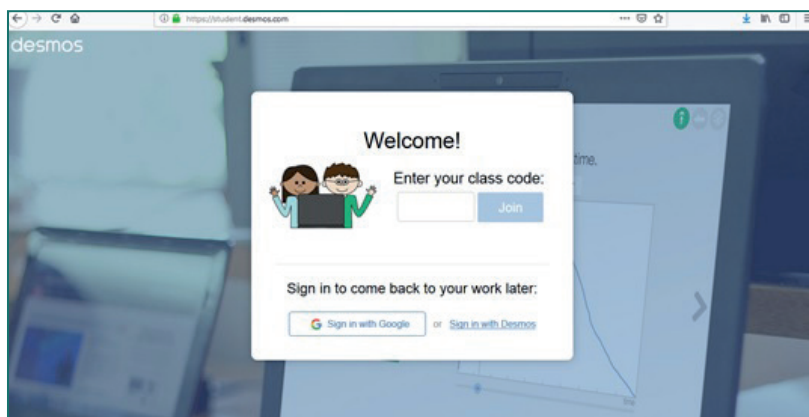


Figura 11. Página de ingreso del alumno con su código.

Y luego de seguir las instrucciones que nosotros ingresamos anteriormente, nos da la posibilidad de observar en una sola pantalla el trabajo de todos los estudiantes, tal como se ilustra en la figura 12. En esta pantalla, si se desea, existe la posibilidad como profesores de elegir la función anónima para que no se vea el nombre de cada estudiante, permitiéndonos de esta forma realizar tranquilamente una retroalimentación oportuna sobre el trabajo de cada uno y dándonos la posibilidad de aprender de los errores cometidos por

cualquier alumno, así como de resaltar los aspectos interesantes que se presenten, todo esto sin necesidad de que el grupo sepa a quien exactamente pertenece el trabajo.”

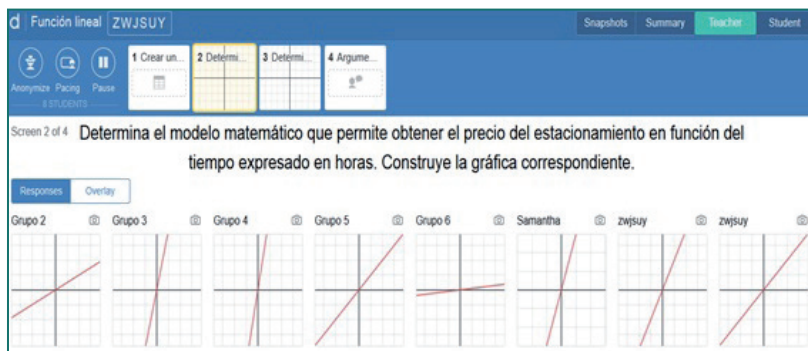


Figura 12. Pantalla de trabajo de toda la clase.

Es importante señalar que aquí se han presentado simplemente algunas de las funciones básicas del programa que podrían ser utilizadas en el proceso de modelización, sin embargo es preciso indicar que el programa tiene muchas funcionalidades que se pueden aprender más a fondo conforme se lo vaya utilizando, y brinda la posibilidad de acceder también a un repositorio de actividades ya creadas y a su vez alimentarlo con las que sean de nuestra propia autoría.

## CONSIDERACIONES FINALES

En este trabajo se ha puesto de manifiesto que algunos de los principales beneficios del trabajo sistemático de la modelización matemática es que permite acceder a conocimientos matemáticos que tienen un papel cada vez más importante tanto en múltiples aplicaciones de la vida real (ingeniería, ciencias de la vida, ciencias sociales, etc.) como también dentro de la propia educación matemática, como por ejemplo formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos, usando de forma cada vez más eficaz el razonamiento matemático y conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos.

A pesar de la importancia de la modelización, diversos estudios previos han puesto de manifiesto que una parte considerable del profesorado tiene conocimientos escasos sobre cómo fomentar este proceso matemático en los alumnos de 12 a 16 años. Así, pues, con el propósito de favorecer el desarrollo profesional del profesorado, se ha descrito y ejemplificado un recurso didáctico para trabajar la modelización matemática en el aula de Educación Secundaria Obligatoria: las Actividades Reveladoras de Pensamiento (*Modeling-Eliciting Activities* o *MEAs*, por sus siglas en inglés), que se fundamentan en los siguientes seis principios: de construcción, de realidad, de autoevaluación, de documentación, de prototipo efectivo y de generalización. La incorporación sistemática de estas actividades, con el apoyo de *software* educativos como por ejemplo el Desmos,

que permite observar el trabajo de todos los estudiantes o de todos los grupos de trabajo, puede contribuir a que progresivamente los alumnos usen representaciones que les permitan modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

## REFERENCIAS

- Albarracín, L. (2017). Los problemas de Fermi como actividades para introducir la modelización. *Modelling in Science Education and Learning*, 10(2), 117-135. Recuperado el 10 de marzo de 2019 de <https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/article/view/7707/8120>
- Bliss, K., y Libertini, J. (2019). What is mathematical modeling? En S. Garfunkel y M. Montgomery (Eds.), *Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education* (pp. 7–21). Philadelphia.
- Blum, W., y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58. Recuperado el 12 de marzo de 2019, de <http://proxy.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/view/1620/1087>
- Blum, W., y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Edits.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* (1ra. ed., págs. 222-231). Chichester.
- Carreira, S., Amado, N., y Lecoq, F. (2011). Mathematical Modeling of Daily Life in Adult Education: Focusing on the Notion of knowledge. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Edits.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling* (págs. 199-210). New York: Springer.
- Ferrando-Palomares, I., y Navarro, B. (2015). Un viaje de fin de curso y tres tareas de modelización. Una experiencia en un aula de secundaria. *Modelling in Science Education and Learning*, 8(2), 79-92. Recuperado el 12 de marzo de 2019, de <https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/article/view/3681/4171>
- Gallart, C., García-Raffi, L., y Ferrando, I. (2019). Modelización matemática en la educación secundaria: manual de uso. *Modelling in Science Education and Learning*, 12(1), 71-86. Recuperado el 12 de marzo de 2019, de <https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/article/view/10955/11035>
- Girnat, B., y Eichler, A. (2011). Secondary Teacher's Beliefs on Modeling in Geometry and Stochastics. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Edits.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling* (págs. 75-84). New York: Springer.
- Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und. En G. Graumann, et al. (Edits.), *Materialien für einen realitätsbezogenen* (págs. 64-84). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.
- Kaiser, G., Blomøj, M., y Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM Mathematics Education*, 38(2), 82-85.
- Kaiser, G., y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 38(3), 302-310.
- Lesh, R., y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning and Problem Solving. En R. Lesh, y H. M. Doerr (Edits.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (págs. 3-34). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., y Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. En A. Kelly, R. Lesh, A. Kelly, y R. Lesh (Edits.), *Handbook of Research Desing in Mathematics and Science Education* (págs. 591-645). Mahwah, New Jersey: Lawrence Ealbaum Associates.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standars for School Matematics*. Reston: NCTM.
- Organization for Economic Cooperation and Development. (2017). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving*. Paris: OECD. doi:<http://dx.doi.org/10.1787/9789264281820-en>
- Sierra Galdón, L., Juan Blanco, M. A., Garcia-Raffi, L. M., y Gómez Urgellés, J. (2011). Estrategias de aprendizaje basadas en la modelización matemática en Educación Secundaria Obligatoria. Recuperado el 20 de marzo de 2019, de [https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/12689/Ponencia\\_XVJAEM\\_v2.pdf](https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/12689/Ponencia_XVJAEM_v2.pdf)
- Sol, M., Giménez, J., y Rosich, N. (2011). Trayectorias modelizadoras en la ESO. *Modelling in Science Education and Learning*, 4(27), 329-343. Recuperado el 20 de marzo de 2019, de <https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/article/view/3100/3196>
- Trigueros Gaisman, M. (2006). Ideas acerca del movimiento del péndulo: un estudio desde una perspectiva de modelación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11(31), 1207-1240. Recuperado el 20 de marzo de 2019, de <https://www.comie.org.mx/revista/v2018/rmie/index.php/nrmie/article/view/732/732>
- Trelles-Zambrano, C., y Alsina, Á. (2017). Nuevos Conocimientos para una Educación Matemática del S. XXI: panorama internacional de la modelización en el currículo. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(51), 140-163. Recuperado el 2 de marzo de 2109, de <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2017/51/07.pdf>



## Partición prismática de paralelepípedos en seis pirámides triangulares equivalentes

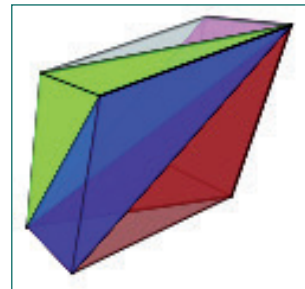
José R. Galo Sánchez

Red Educativa Digital Descartes

[reddescartes.org](http://reddescartes.org) [proyectodescartes.org](http://proyectodescartes.org)

**Resumen:** En este artículo se analiza en detalle la descomposición de los diferentes tipos de paralelepípedos en pirámides cuadriláteras y en pirámides triangulares. Se obtienen de manera constructiva las particiones con cardinal mínimo y se profundiza en aquellas que, sin tener cardinal mínimo, están formadas por seis pirámides que forman dos prismas. Se cuantifican y detallan todas las particiones posibles y se proporcionan enlaces a recursos interactivos que permiten verlas digitalmente y, a su vez, también obtener los desarrollos planos con los que abordar su reproducción real o tangible y su manipulación. Para cualquier paralelepípedo que defina el interesado se obtiene un entretenido puzle, no siempre fácil de componer:

**Palabras clave:** Partición poliedros, paralelepípedo, pirámide.



## Prismatic dissection of parallelepipeds into six equivalent triangular pyramids

**Abstract:** In this article we analyze in detail the decomposition of the different types of parallelepipeds in quadrilateral pyramids and triangular pyramids. Partitions with minimal cardinal are obtained in a constructive way and deepened in those that, without having minimum cardinal, are formed by six pyramids that form two prisms. All the possible partitions are quantified and detailed and links to interactive resources are provided that allow them to be viewed digitally and, in turn, also obtain the flat developments with which to address their real or tangible reproduction and manipulation. For any parallelepiped defined by the interested party, an entertaining puzzle is obtained, not always easy to compose.

**Keywords:** Polyhedrom dissection, parallelepiped, pyramid.

## INTRODUCCIÓN

En el artículo “Partición prismática de un cubo en seis pirámides triangulares equivalentes” (Galo-Sánchez, 2018) se realiza un análisis constructivo, global y unificador de la descomposición de un cubo o hexaedro regular en pirámides cuadradas y triangulares y, en particular, se incide en las particiones que sin tener cardinal mínimo están formadas por pirámides equivalentes. Era de esperar que la innata inquietud matemática que trata de extender todo lo que se aprende, apareciera y sirviera como catalizador para dar el salto a su generalización al caso de los paralelepípedos, de los que es un caso particular el cubo. Y eso es lo que se realiza en este artículo. Se sigue un esquema y método global para los cuatro tipos de paralelepípedos (cubo, ortoedro, romboedro y romboiedro), pero también se profundiza en las particularidades intrínsecas a cada uno de ellos cuando se introducen situaciones o restricciones que introducen regularidades adicionales, por ejemplo, entre otros casos analizados, un ortoedro con dos caras cuadradas.

En la primera parte se aborda la partición en pirámides cuadriláteras. El procedimiento es común en todos los casos y consiste en la elección de un punto interior o de la frontera del paralelepípedo, que será la cúspide común a todas las pirámides de la partición, y el trazado de segmentos desde dicho punto a los vértices del poliedro, los cuales se configuran como las aristas de las pirámides. La partición mínima está formada por tres pirámides y coincide cuando la cúspide común es un vértice del poliedro. Si la cúspide se ubica en una arista del paralelepípedo se obtienen cuatro pirámides, cinco si se sitúa en una cara y seis si es un punto del interior.

En la segunda parte se efectúa la partición de un paralelepípedo en pirámides triangulares. Ésta puede realizarse partiendo de una partición del mismo en pirámides cuadriláteras con cardinal mínimo (tres) y dividiendo cada una de esas pirámides en dos triangulares, así se obtienen particiones con seis pirámides entre las que distinguiremos particiones prismáticas o no prismáticas según el paralelepípedo original quede dividido en dos prismas triangulares o no. Aquí se realiza, para cada tipo de paralelepípedo, un detallado análisis que cuantifica las diferentes particiones que se pueden obtener y las pirámides que las componen. No obstante, la obtención de la partición de cardinal mínimo, compuesta por cinco pirámides, requiere de un proceso constructivo independiente que también se detalla.

Todo el estudio puede verse digitalmente en escenas interactivas desarrolladas con la herramienta de autor denominada *DescartesJS* (RED Descartes, 2018). Esas escenas también facilitan los desarrollos planos de las pirámides que constituyen la partición, pudiéndose imprimir y consecuentemente permite abordar su reproducción real o tangible y su manipulación. Para cualquier paralelepípedo que defina el interesado se obtiene un entretenido puzle, no siempre fácil de componer.

## 1. PARTICIÓN DE UN PARALELEPÍPEDO EN PIRÁMIDES DE BASE CUADRILÁTERA

Un cubo es un caso particular de paralelepípedo, es decir, de un poliedro convexo que cuenta con ocho vértices, doce aristas y seis caras que son paralelogramos. Por la

similitud de forma y propiedades entre estos poliedros es lógico plantearse la extensión del análisis realizado en la partición del cubo en pirámides cuadradas (Galo Sánchez, 2018) a la partición de dichos hexaedros en pirámides de base cuadrilátera y es lo que se realiza a continuación.

El procedimiento para efectuar la partición en pirámides cuadriláteras es el mismo abordado en el caso del cubo, es decir, elegir un punto del interior o de la frontera del poliedro considerado y desde él trazar segmentos que lo unan con los ocho vértices; y también se reproducen las situaciones observadas en el cubo:

- Si el punto considerado es un vértice la descomposición estará compuesta por tres pirámides cuadriláteras (partición de cardinal mínimo).
- Si el punto pertenece a una arista serán cuatro las pirámides obtenidas.
- Si el punto es del interior de una cara son cinco las pirámides.
- Si el punto es del interior del hexaedro serán seis las pirámides.

Lo que obviamente cambia es la regularidad y la congruencia entre las pirámides obtenidas ya que ésta depende de la regularidad del paralelepípedo inicial considerado. En las imágenes de la figura 1 se muestra un ejemplo de la partición de un romboiedro en tres, cuatro, cinco y seis pirámides cuadriláteras, y en la figura 2 se reflejan los desarrollos respectivos de cada una de estas particiones.

Se dispone de un recurso interactivo<sup>1</sup> que permite definir el paralelepípedo que se desea partir y, seleccionando el punto que actúa como cúspide común, se obtiene la partición correspondiente, su desarrollo tridimensional y el desarrollo plano de cada una de las pirámides que intervienen (ver figura 3). Así pues, se pueden imprimir los desarrollos planos de las pirámides de la partición, construir éstas y con ellas reproducir tangiblemente el paralelepípedo considerado.

---

1. Descomposición de un paralelepípedo en pirámides cuadriláteras: [http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales\\_didacticos/Paralelepipedo3456PiramidesCuadrilateras-JS/index.html](http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/Paralelepipedo3456PiramidesCuadrilateras-JS/index.html)

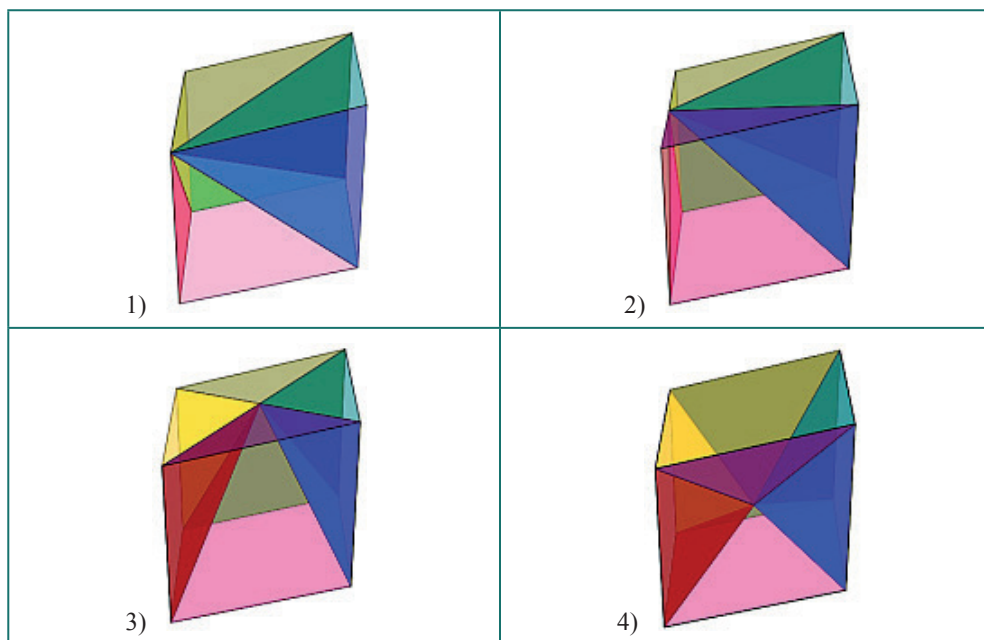


Figura 1. Partición de un paralelepípedo en tres, cuatro, cinco y seis pirámides cuadriláteras, imágenes etiquetadas como 1), 2), 3) y 4) respectivamente.

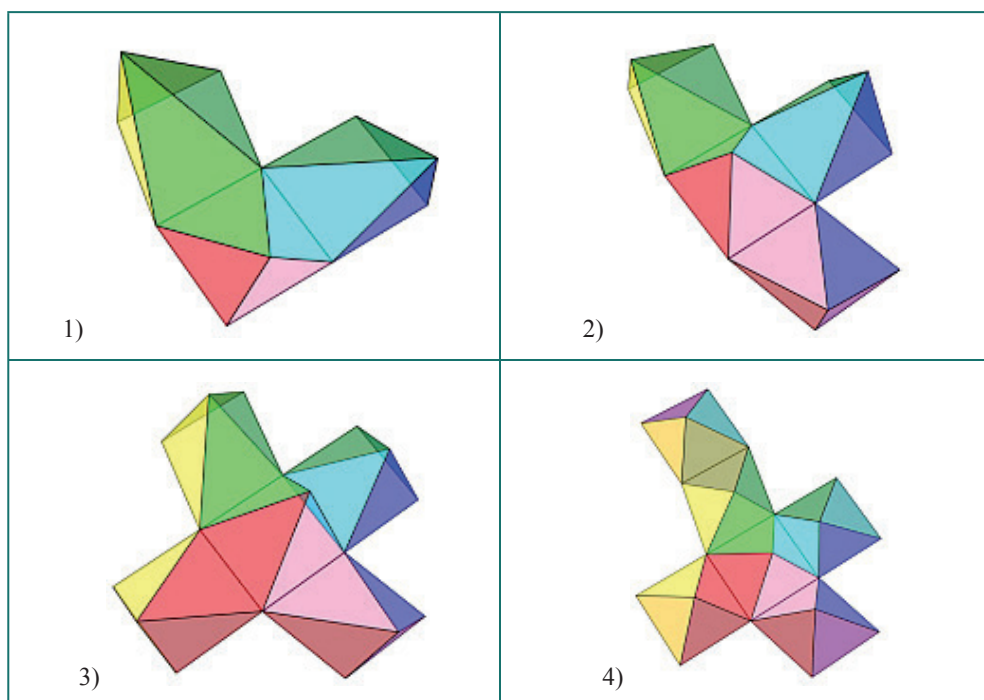


Figura 2. Pirámides cuadriláteras correspondientes a las particiones del romboiedro reflejadas en la Fig. 1, imágenes etiquetadas como 1), 2), 3) y 4) respectivamente.

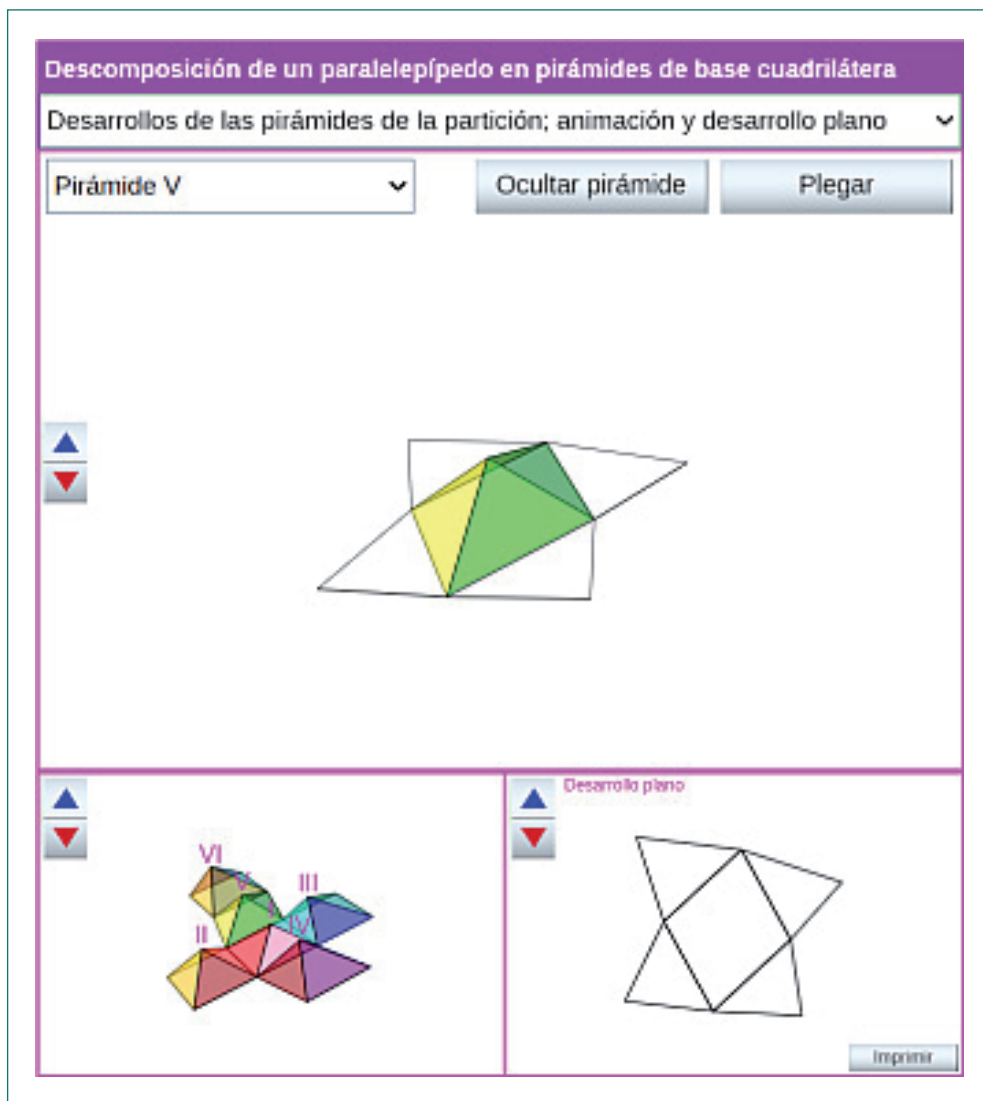


Figura 3. Obtención y/o impresión de los desarrollos planos de una partición.

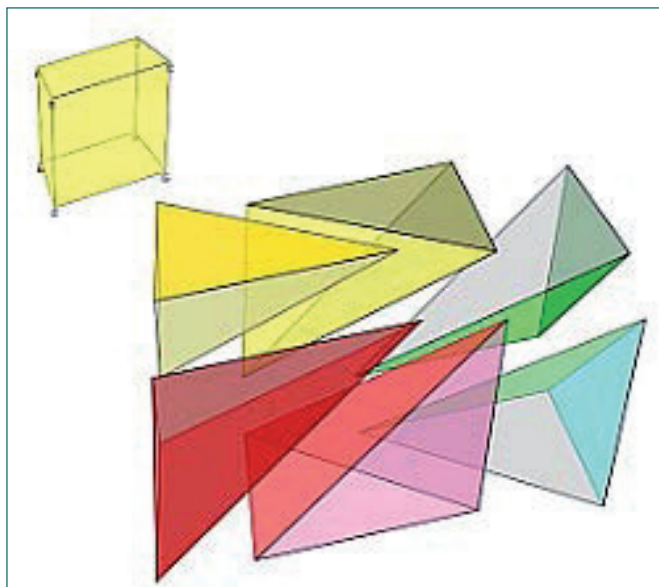


Figura 4. Partición de un paralelepípedo en prismas triangulares por división de pirámides cuadriláteras

## 2. PARTICIÓN DE UN PARALELEPÍPEDO EN PIRÁMIDES DE BASE TRIANGULAR

La partición de un paralelepípedo en pirámides de base triangular puede abordarse desde dos perspectivas o procedimientos:

- Descomposición de cada una de las pirámides cuadriláteras obtenidas en la sección anterior en dos triangulares<sup>2</sup> mediante la elección de una de las dos diagonales de la base cuadrilátera (ver figura 4). Consecuentemente tendremos:
  - Si el punto considerado es un vértice del hexaedro la descomposición estará compuesta por tres pirámides cuadriláteras que conducen a seis triangulares.
  - Si el punto pertenece a una arista serán cuatro las pirámides cuadriláteras obtenidas y ocho las triangulares.
  - Si el punto es del interior de una cara son cinco las pirámides cuadriláteras y diez las triangulares.
  - Si el punto es del interior del hexaedro serán seis las pirámides cuadriláteras y doce las triangulares.

En este caso la partición mínima estará compuesta por seis pirámides triangulares, y acontecen dos situaciones que analizaremos posteriormente y que clasificaremos como particiones prismáticas y particiones no prismáticas.

- Construcción específica, la cual es imprescindible para poder obtener la partición con menor número de elementos que es la compuesta por cinco pirámides triangulares.

<sup>2</sup> Descomposición de un paralelepípedo por división de pirámides cuadriláteras: [http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales\\_didacticos/Paralelepipedo3456PiramidesTriangulares-JS/index.html](http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/Paralelepipedo3456PiramidesTriangulares-JS/index.html)

## 2.1 Partición con cardinal mínimo de un paralelepípedo en pirámides triangulares

Para obtener la partición en pirámides triangulares con cardinal mínimo ha de tenerse en cuenta: que el menor número de elementos primarios que tienen que intervenir en la partición son los ocho vértices, las doce aristas y seis diagonales de las caras, una por cada una de ellas; y que una pirámide triangular de la partición queda determinada sin más que elegir dos segmentos con distinta dirección y que no sean coplanarios.

En caso de ser un paralelepípedo las diagonales de las caras opuestas o bien son paralelas o bien tienen distinta dirección. Por tanto, pueden darse las siguientes situaciones:

- Que todas las diagonales tengan distinta dirección, de manera que:
  - Si con esas seis diagonales se construye una pirámide triangular, ésta queda ubicada en el interior del paralelepípedo y lo fracciona en cinco pirámides, obteniéndose la partición de cardinal mínimo<sup>3</sup> (ver figura 5). Se verifica que las cuatro pirámides exteriores son equivalentes entre sí y el volumen de cada una de ellas es la sexta parte del volumen total y, por tanto, el volumen de la pirámide interior es la tercera parte del total.
  - Si esas seis diagonales no conforman una pirámide única, entonces se obtienen particiones no prismáticas<sup>4</sup> (ver figura 6).
- Que al menos haya dos diagonales que sean paralelas. En este caso esas dos diagonales determinan un plano que divide al paralelepípedo en dos prismas triangulares, lo cual conduce a particiones prismáticas que analizaremos posteriormente y que contarán como mínimo con seis pirámides triangulares.

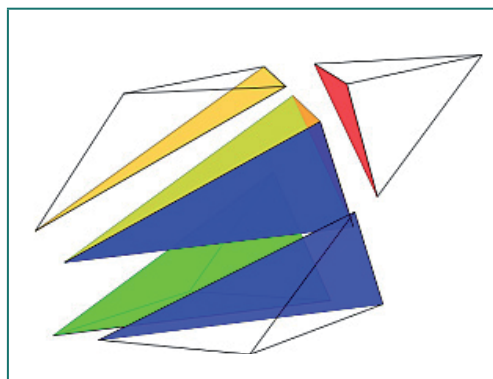


Figura 5. Partición de un paralelepípedo en cinco pirámides triangulares.

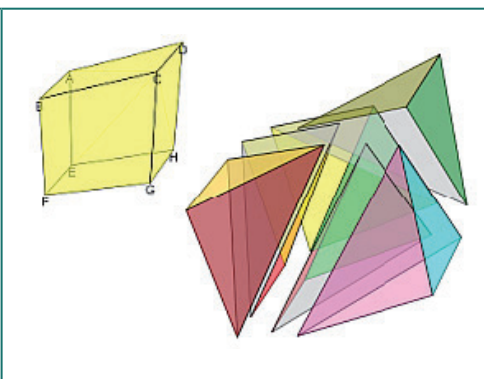


Figura 6. Partición no prismática de un romboiedro en seis pirámides triangulares.

3. Descomposición de un paralelepípedo en cinco pirámides triangulares: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/Hexaedro5PiramidesTriangulares-JS/index.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/Hexaedro5PiramidesTriangulares-JS/index.html)

4. Partición no prismática de un romboiedro: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/RomboiedroNoPrismaticaPiramidesTriangulares-JS/index.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/RomboiedroNoPrismaticaPiramidesTriangulares-JS/index.html)

## 2.2 Partición prismática de un paralelepípedo en pirámides triangulares

En el apartado anterior se ha observado que cuando en un paralelepípedo hay al menos dos diagonales de caras opuestas que son coplanarias, entonces puede descomponerse en dos prismas triangulares<sup>5</sup> y, consecuentemente, su partición en pirámides triangulares puede reducirse y realizarse mediante la partición de prismas triangulares en pirámides triangulares. Es lo que hemos denominado partición prismática del paralelepípedo.

En esa división encontramos las siguientes situaciones:

- La partición de un romboedro conduce a dos prismas oblicuos de base un triángulo escaleno.
- En un romboedro los dos prismas oblicuos tienen por base un triángulo isósceles. Distinguimos dos situaciones:
  - En la primera, el corte se efectúa por el plano determinado por dos diagonales menores coplanarias. Este corte determina un rectángulo y, por tanto, las diagonales de esa cara son iguales. Y, adicionalmente, los lados iguales del triángulo isósceles de las bases coinciden en medida con la arista lateral de los prismas. Se obtiene una regularidad que destacamos, pues se transmitirá, según observaremos posteriormente, a la partición en pirámides.
  - En la segunda, el corte se efectúa por el plano determinado por dos diagonales mayores coplanarias, que es un plano de simetría del romboedro, y que determina un romboide en el plano de corte. La arista lateral no coincide con los lados de la base y al ser un romboide sus diagonales son distintas, hay menos regularidad en la partición.
- En un ortoedro son dos prismas rectos de base un triángulo rectángulo escaleno. En el caso particular de que el ortoedro tenga algún par de caras cuadradas, la partición realizada sobre éstas conduciría a prismas rectos con bases triángulos rectángulos isósceles
- En un cubo se obtienen dos prismas rectos de base un triángulo rectángulo isósceles y los catetos tienen igual longitud que la arista lateral.

## 2.3 Partición de un prisma triangular oblicuo en pirámides triangulares

Consideremos inicialmente el caso más genérico, el de un prisma oblicuo de base un triángulo escaleno, y posteriormente iremos concretando los diferentes casos particulares. La partición de un prisma triangular oblicuo en pirámides triangulares con cardinal mínimo se obtiene considerando únicamente como elementos primarios los seis vértices  $\{A, B, C, E, F, G\}$ , las nueve aristas y las diagonales de las caras laterales. Haciendo grupos de cuatro segmentos obtenemos doce pirámides triangulares:  $\{ABCE, ABCF, ABCG, ABEG, ABFG, ACEF, ACFG, ACFG, BCEF, BCEG, BEFG, CCFG\}$ , las cuales determinan seis particiones distintas del prisma. Estas particiones están compuestas cada

---

5. Descomposición de un paralelepípedo en dos prismas triangulares: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionParalelepipedo2Prismas.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionParalelepipedo2Prismas.html)

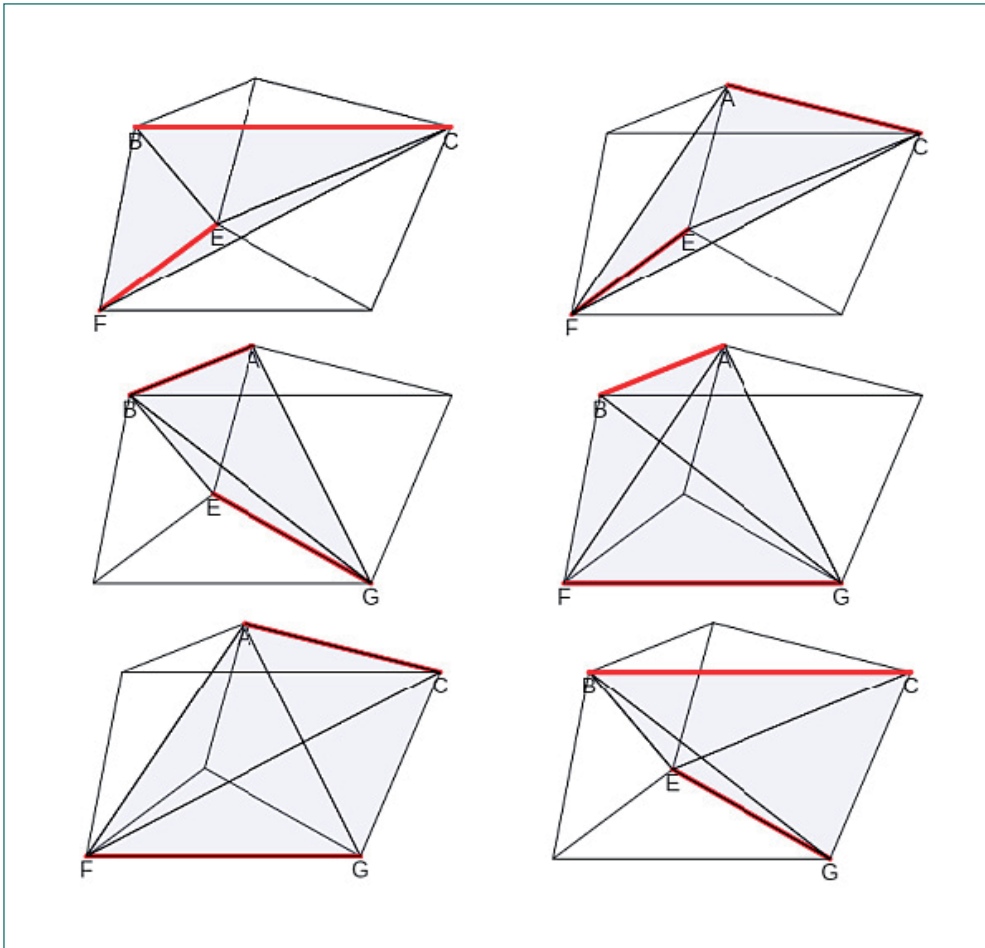


Figura 7. Partición de un prisma triangular oblicuo en pirámides triangulares.

una por tres pirámides triangulares que son equivalentes entre sí, es decir, el volumen de cada una de ellas es la tercera parte del volumen total del prisma. En la figura 7 se reflejan esas seis particiones<sup>6</sup>.

Para poder comparar esas pirámides y esas particiones denotemos:

- La longitud de las aristas como:  $a = d(BC) = d(FG)$ ,  $b = d(AC) = d(EG)$ ,  $c = d(AB) = d(EF)$  y  $l = d(AE) = d(BF) = d(CG)$ .
- La longitud de las diagonales como:  $d_1 = d(BE)$ ,  $d_2 = d(AF)$ ,  $d_3 = d(CF)$ ,  $d_4 = d(BG)$ ,  $d_5 = d(AG)$  y  $d_6 = d(CE)$ .

6. Partición de un prisma triangular oblicuo en pirámides triangulares: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Particion-PrismaOblicuoAux1.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Particion-PrismaOblicuoAux1.html)

### 2.3.1 Partición de un prisma procedente de un romboedro

Si consideramos que el prisma triangular procede de la partición de un romboedro, entonces, en general, las longitudes  $l, a, b, c, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$  son distintas. En base a ello, en la figura 8 se refleja una tabla donde se detalla cada una de las seis particiones posibles, señalando los vértices de las tres pirámides que conforman cada partición e indicando con un uno los segmentos que constituyen sus aristas<sup>7</sup>. Al tener esos diez segmentos diferente longitud, las doce pirámides son diferentes<sup>8</sup>, en la columna “Pirámide tipo” de esa tabla las hemos numerado del 1 al 12. También, al comparar las seis particiones entre sí se observa que no hay ninguna congruencia entre ellas.

### 2.3.2 Partición de un prisma procedente de un romboedro (primer caso)

Cuando un romboedro se parte por el plano determinado por dos diagonales menores, la relación que existe entre los segmentos citados es:  $a = c = l, b = d_1 = d_4, d_2 = d_3$  y  $d_5 = d_6$ . En la tabla de la figura 9 se indica cuántas aristas de igual medida intervienen en cada pirámide<sup>9</sup>.

Comparando las doce pirámides entre sí<sup>10</sup> se observa que sólo hay seis tipos diferentes, si bien pueden aparecer con distinta orientación, es decir, que son congruentes mediante una simetría central o especular (según se desee o necesite). En la tabla, esta congruencia se ha indicado incluyendo un asterisco a continuación del tipo. Por ejemplo ACEF y ACFG son ambas de tipo 4, pero tienen distinta orientación, ACFG es la simétrica de ACEF y viceversa. Las pirámides de tipo 3, 5 y 6 son simétricas y, por tanto,  $3 = 3^*, 5 = 5^*$  y  $6 = 6^*$ .

También, al comparar las particiones entre sí, encontramos que son congruentes dos a dos, pues son simétricas por parejas: la I con la IV, II y V, y III y VI (en la tabla se representan con igual color). Así pues, son tres las formas de dividir un prisma de este tipo, salvo congruencias.


7. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un romboedro en pirámides triangulares: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaRomboedro.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaRomboedro.html)

8. Una escena interactiva facilita la comparación y permite obtener los desarrollos planos de las pirámides triangulares que conforman la partición de ese prisma procedente de un romboedro: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaRomboedro.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaRomboedro.html)

Ha de tenerse presente que a partir de un desarrollo plano, según se pliegue en un sentido u otro, se obtienen dos pirámides con aristas iguales, pero diferente orientación, es decir, el exterior pasa a ser el interior y viceversa. Ambas son congruentes mediante una simetría central. De esto haremos uso en la partición prismática de cada paralelepípedo.

9. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un romboedro en pirámides triangulares (primer caso): [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaRomboedro.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaRomboedro.html)

10. Comparación pirámides de la partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un romboedro en pirámides triangulares (primer caso) y obtención de los desarrollos planos de las pirámides: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaRomboedro1.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaRomboedro1.html)



$a = d(BC) = d(FG)$     $d1 = d(BE)$     $d3 = d(CF)$     $d5 = d(AG)$   
 $b = d(AC) = d(EG)$     $d2 = d(AF)$     $d4 = d(BG)$     $d6 = d(CE)$   
 $c = d(AB) = d(EF)$     $l = d(AE) = d(BF) = d(CG)$

Partición	Pirámide	l	a	b	c	d1	d2	d3	d4	d5	d6	Pirámide tipo
I	ABCE	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
	BCEF	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	2
	CEFG	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	3
II	ABCF	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	4
	ACEF	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	5
	CEFG	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	3
III	ABCG	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	6
	ABEG	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	7
	BEFG	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	8
IV	ABCG	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	6
	ABFG	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	9
	AEFG	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	10
V	ABCF	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	4
	ACFG	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	11
	AFFG	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	10
VI	ABCE	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
	BCEG	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	12
	BEFG	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	8

Figura 8. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un romboedro en pirámides triangulares.


Partición	Pirámide	a = c = l	b = d1 = d4	d2 = d3	d5 = d6	Pirámide tipo	Congruencias entre particiones
I	ABCE	3	2	0	1	1	
	BCEF	3	1	1	1	2	
	CEFG	3	1	1	1	2*	
II	ABCF	3	1	2	0	3	
	ACEF	2	1	2	1	4	
	CEFG	3	1	1	1	2*	
III	ABCG	3	2	0	1	1*	
	ABEG	2	3	0	1	5	
	BEFG	3	3	0	0	6	
IV	ABCG	3	2	0	1	1*	
	ABFG	3	1	1	1	2*	
	AEFG	3	1	1	1	2	
V	ABCF	3	1	2	0	3	
	ACFG	2	1	2	1	4*	
	AEFG	3	1	1	1	2	
VI	ABCE	3	2	0	1	1	
	BCEG	2	3	0	1	5	
	BEFG	3	3	0	0	6	

Figura 9. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un romboedro en pirámides triangulares (primer caso).

### 2.3.3 Partición de un prisma procedente de un romboedro (segundo caso)

Cuando el romboedro se parte por el plano determinado por dos diagonales mayores, la relación que existe entre los segmentos es:  $b = c = 1$ ,  $a = d2 = d6$ ,  $d1 = d5$  y  $d3$  y  $d4$  difieren de los anteriores y entre sí. Hay distinta regularidad y en la tabla de la figura 10 se muestra la nueva relación<sup>11</sup>. Comparando las doce pirámides entre sí<sup>12</sup>, de nuevo se observa que hay seis tipos diferentes. De ellas la 1 y la 2 son simétricas ( $1 = 1^*$  y  $2 = 2^*$ ); la 3 es asimétrica y aparece en las particiones tanto la 3 como la 3\*; y las 4, 5 y 6 son asimétricas y no aparecen en las particiones las pirámides 4\*, 5\* y 6\*. Estas observaciones anteriores serán de interés cuando abordemos la construcción de las particiones prismáticas del romboedro.

Comparando las particiones encontramos que son cuatro las formas de dividir un prisma de este tipo, salvo congruencias. En este caso I y V son congruentes mediante la composición de un giro alrededor del eje OY y otro alrededor de OZ (según la orientación

11. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un romboedro en pirámides triangulares (segundo caso): [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaRomboedro2.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaRomboedro2.html)

12. Comparación pirámides de la partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un romboedro en pirámides triangulares (segundo caso) y obtención de los desarrollos planos de las pirámides: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaRomboedro2.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaRomboedro2.html)

Partición	Pirámide	$b = c = l$	$a = d_2 = d_6$	$d_1 = d_5$	$d_3$	$d_4$	Pirámide tipo	Congruencias entre particiones
I	ABCE	3	2	1	0	0	1	[Diagrama de barras de colores representando congruencias]
	BCEF	2	2	1	1	0	2	
	CEFG	3	2	0	1	0	3	
II	ABCF	3	2	0	1	0	3	
	ACEF	3	2	0	1	0	3*	
	CEFG	3	2	0	1	0	3	
III	ABCG	3	1	1	0	1	4	
	ABEG	3	0	2	0	1	5	
	BEFG	3	1	1	0	1	4	
IV	ABCG	3	1	1	0	1	4	
	ABFG	2	2	1	0	1	6	
	AEFG	3	2	1	0	0	1	
V	ABCF	3	2	0	1	0	3	
	ACFG	2	2	1	1	0	2	
	AEFG	3	2	1	0	0	1	
VI	ABCE	3	2	1	0	0	1	
	BCEG	2	2	1	0	1	6	
	BEFG	3	1	1	0	1	4	

Figura 10. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un romboedro en pirámides triangulares (segundo caso).

Partición	Pirámide	$l$	$a$	$b$	$c$	$d_1 = d_2$	$d_3 = d_4$	$d_5 = d_6$	Pirámide tipo	Congruencias entre particiones
I	ABCE	1	1	1	1	1	0	1	1	[Diagrama de barras de colores representando congruencias]
	BCEF	1	1	0	1	1	1	1	2	
	CEFG	1	1	1	1	0	1	1	3	
II	ABCF	1	1	1	1	1	1	0	4	
	ACEF	1	0	1	1	1	1	1	5	
	CEFG	1	1	1	1	0	1	1	3	
III	ABCG	1	1	1	1	0	1	1	3*	
	ABEG	1	0	1	1	1	1	1	5*	
	BEFG	1	1	1	1	1	1	0	4*	
IV	ABCG	1	1	1	1	0	1	1	3*	
	ABFG	1	1	0	1	1	1	1	2*	
	AEFG	1	1	1	1	1	0	1	1*	
V	ABCF	1	1	1	1	1	1	0	4	
	ACFG	1	1	1	0	1	1	1	6	
	AEFG	1	1	1	1	1	0	1	1*	
VI	ABCE	1	1	1	1	1	0	1	1	
	BCEG	1	1	1	0	1	1	1	6*	
	BEFG	1	1	1	1	1	1	0	4*	

Figura 11. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un ortoedro en pirámides triangulares (primer caso).

inicial con la que se representa el prisma en la escena), e igualmente ocurre con IV y VI. Adicionalmente se da la particularidad que la partición II está formada por pirámides que son sólo de un tipo, es decir, que son congruentes entre sí.

### 2.3.4 Partición de un prisma procedente de un ortoedro (primer caso)

En el caso de que el prisma triangular proceda de un ortoedro cuyas tres dimensiones espaciales sean distintas tenemos que  $a$ ,  $c$  y  $l$  tienen longitudes diferentes; pero  $d_1 = d_2$ ,  $d_3 = d_4$  y  $d_5 = d_6$  porque las caras laterales son rectangulares, y  $b$ , en general, será distinto a cualquier valor anterior. En la tabla de la figura 11 se detallan las relaciones existentes<sup>13</sup>. Comparando las doce pirámides<sup>14</sup> y se puede comprobar que hay seis tipos diferentes, que todas son asimétricas y que en las diferentes particiones aparecen los seis tipos por parejas, es decir, una pirámide y su simétrica. Las doce pirámides son 1, 1\*, 2, 2\*, 3, 3\*, 4, 4\*, 5, 5\*, 6 y 6\*.

Comparando las particiones se obtiene que son tres las formas de dividir un prisma de este tipo, salvo congruencias. I y IV, II y III, V y VI coinciden respectivamente mediante una simetría especular y un giro, o bien de manera equivalente mediante una simetría central.

13. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un ortoedro en pirámides triangulares (primer caso): [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaOrtoedro.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaOrtoedro.html)

14. Comparación pirámides de la partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un ortoedro en pirámides triangulares (primer caso) y obtención de los desarrollos planos de las pirámides: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaOrtoedro1.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaOrtoedro1.html)



### 2.3.6 Partición de un prisma procedente de un ortoedro (tercer caso)

Si el ortoedro con dos dimensiones iguales lo dividimos a través de las dos caras cuadradas, el prisma obtenido puede partirse en pirámides triangulares<sup>17</sup> de acuerdo a lo reflejado en la tabla de la figura 13. En este caso sólo tenemos cuatro tipos de pirámides diferentes<sup>18</sup>, apareciendo en las dos orientaciones posibles. Las tipo 1, 2 y 4 son asimétricas y la 3 es simétrica ( $3 = 3^*$ ).

Salvo congruencias solamente tenemos dos formas de partir este prisma. La partición I y la IV son congruentes mediante una simetría especular o bien una simetría central. Las cuatro particiones II, III, V y VI son congruentes entre sí: II y III mediante una simetría central; II y V con una simetría especular y II y VI realizando un giro.

### 2.3.7 Partición de un prisma procedente de un cubo

En el caso de que el prisma triangular proceda de un cubo, ortoedro con las tres dimensiones espaciales iguales, obtenemos que el número de tipos de pirámides son tres y el de particiones dos, lo cual ya se detalló en (Galo-Sánchez J.R., 2018) y ahora lo obtenemos como un caso particular de la partición de un ortoedro. En la tabla<sup>19</sup> de la figura 14 mostramos este resultado siguiendo el esquema general planteado en el análisis de todos los casos anteriores.

De los tres tipos de pirámides<sup>20</sup>, el 1 es una pirámide asimétrica y aparecen las dos orientaciones posibles: 1 y 1\*. Las pirámides tipo 2 y 3 son simétricas.

La partición I y la IV son congruentes mediante una simetría especular o bien una simetría central. Las cuatro particiones II, III, V y VI son congruentes entre sí: II y III mediante una simetría central; II y V con una simetría especular y II y VI realizando un giro. Así pues, salvo congruencias, solamente tenemos dos formas de partir este prisma, por ejemplo, las particiones I y II. Y, en particular, la I está formada por pirámides que también son congruentes entre sí.

17. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un ortoedro en pirámides triangulares (tercer caso): [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaOrtoedro3.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaOrtoedro3.html)

18. Comparación pirámides de la partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un ortoedro en pirámides triangulares (tercer caso) y obtención de los desarrollos planos de las pirámides: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaOrtoedro3.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaOrtoedro3.html)

19. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un cubo en pirámides triangulares: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaCubo.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/ParticionPrismaCubo.html)

20. Comparación pirámides de la partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un cubo en pirámides triangulares y obtención de los desarrollos planos de las pirámides: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaCubo.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/PrismaOblicuoPiramide-JS/Desarrollos/desarrolloPrismaCubo.html)

Figura 14. Partición de un prisma triangular oblicuo procedente de un cubo en pirámides triangulares.

Partición	Pirámide	l	a = c	b	d1 = d2 = d3 = d4	d5 = d6	Pirámide tipo	Congruencias entre particiones
I	ABCE	1	2	1	1	1	1	
	BCEF	1	2	0	2	1	2	
	CEFG	1	2	1	1	1	1	
II	ABCF	1	2	1	2	0	3	
	ACEF	1	1	1	2	1	4	
	CEFG	1	2	1	1	1	1	
III	ABCG	1	2	1	1	1	1*	
	ABEG	1	1	1	2	1	4*	
	BEFG	1	2	1	2	0	3	
IV	ABCG	1	2	1	1	1	1*	
	ABFG	1	2	0	2	1	2*	
	AEFG	1	2	1	1	1	1*	
V	ABCF	1	2	1	2	0	3	
	ACFG	1	1	1	2	1	4*	
	AEFG	1	2	1	1	1	1*	
VI	ABCE	1	2	1	1	1	1	
	BCEG	1	1	1	2	1	4	
	BEFG	1	2	1	2	0	3	

## 2.4 Partición prismática de los paralelepípedos

Conocidas las diferentes particiones de cada uno de los prismas que se obtienen al dividir un paralelepípedo estamos en condiciones de poder analizar cuáles son las diferentes particiones prismáticas de los paralelepípedos. En este caso, y siguiendo el orden inverso al considerado en la sección anterior 2.3, partiremos del caso más regular —el ortoedro—, y avanzaremos hacia el más irregular —el romboiedro—. Seguiremos un mismo esquema para todos los casos y dado que el cubo ya fue analizado y descrito en (Galo-Sánchez J.R., 2018) se omite aquí.




### 2.4.1. Partición prismática de un ortoedro (tercer caso)

Un ortoedro con dos dimensiones diferentes puede partirse en dos prismas dividiéndolo por las dos caras cuadradas opuestas. Salvo congruencias hay una única forma de hacerlo. Esos dos prismas tienen simetría especular respecto al plano de corte y simetría central respecto al punto de intersección de las diagonales del ortoedro.

Según lo analizado en el apartado 2.3.6, cada uno de esos prismas puede partirse en pirámides triangulares equivalentes de seis formas diferentes (I, II, III, IV, V y VI).

I	1	II	3	III	1*	IV	1*	V	3	VI	1
	2		4		4*		2*		4*		4
	1		1		3		1*		1*		3

Aplicando un giro, una simetría especular y una simetría central se obtienen las siguientes congruencias entre las seis particiones:

	I	II	III	IV	V	VI
	I	VI	V	IV	III	II
	IV	V	VI	I	II	III
	IV	III	II	I	VI	V

La situación es similar, casi idéntica, al caso del cubo. Así pues, salvo transformaciones isométricas, hay sólo dos particiones diferentes (en las tablas anteriores se han reflejado usando el mismo color para las particiones congruentes). Basta considerar, por ejemplo, la I y la II.

La construcción del ortoedro se aborda considerando dos de las particiones del prisma anterior y yuxtaponiéndolas. Son 36 las posibilidades, resultado de  $\{I, II, III, IV, V, VI\} \times \{I, II, III, IV, V, VI\}$ . Pero, por las congruencias indicadas, basta considerar las posibles combinaciones de  $\{I, II\}$  con  $\{I, II, III, IV, V, VI\}$ , obteniéndose las siguientes posibilidades:

I-I	I-II	I-III	I-IV	I-V	I-VI
	II-II	II-III	II-IV	II-V	II-VI

Pero entre ellas es necesario buscar posibles congruencias y detectamos que aplicando un giro alrededor de Oy, I-V se transforma en I-III; con un giro alrededor de Oy, I-VI se transforma en I-II y con una simetría central, II-IV se transforma en I-III. Por ello, las posibilidades de partir un ortoedro, que cumpla las condiciones especificadas, en seis pirámides triangulares equivalentes son sólo ocho:

I-I	I-II	I-III	I-IV		
	II-II	II-III		II-V	II-VI

En la figura 15 se reflejan esas ocho particiones y los desarrollos planos de las seis pirámides de una de esas particiones. El recurso interactivo enlazado en la nota al pie<sup>21</sup> pueden observarse estas ocho particiones del ortoedro y obtenerse las que son congruentes con ellas. También pueden imprimirse los desarrollos planos de cada partición y reproducirse un modelo tangible de las mismas.

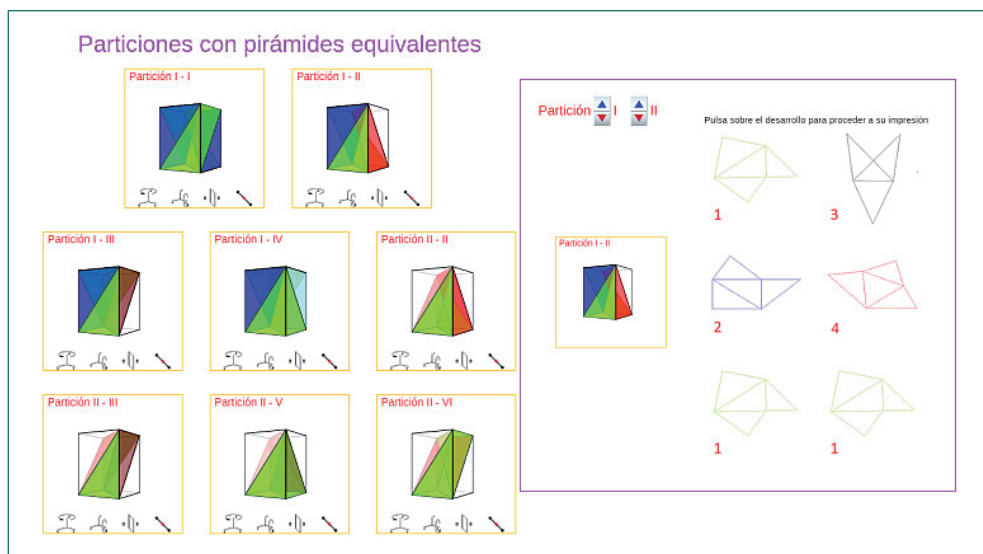


Figura 15. Particiones del ortoedro en pirámides triangulares (caso tercero) y desarrollos planos de la partición.

#### 2.4.2 Partición prismática de un ortoedro (segundo caso)

Un ortoedro con dos dimensiones diferentes puede partirse en dos prismas si lo dividimos por dos caras rectangulares opuestas. Salvo congruencias hay una única forma de hacerlo. Esos dos prismas tienen simetría central respecto al punto de intersección de las diagonales del ortoedro.


Según lo analizado en el apartado 2.3.5, cada uno de esos prismas puede partirse en pirámides triangulares equivalentes de seis formas diferentes (I, II, III, IV, V y VI).

<sup>21</sup> Particiones del ortoedro en pirámides triangulares (caso tercero) y desarrollos planos de la partición: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasOrtoedro3/particionesOrtoedro3.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasOrtoedro3/particionesOrtoedro3.html)

I	1	II	3	III	2*	IV	2*	V	3	VI	1
	1*		4		4		1		5		5*
	2		2		3*		1*		1*		3*

A su vez, cada partición está compuesta por tres pirámides y en ellas aparecen cinco tipos que identificamos como 1, 2, 3, 4 y 5.

Aplicando una simetría central se obtienen las siguientes congruencias entre las seis particiones:

	I	II	III	IV	V	VI
	IV	III	II	I	VI	V

La construcción del ortoedro se aborda considerando dos de las particiones del prisma anterior y yuxtaponiéndolas. Son 36 las posibilidades, resultado de  $\{I, II, III, IV, V, VI\} \times \{I, II, III, IV, V, VI\}$ , pero analizando las congruencias son doce las posibilidades<sup>22</sup> (ver figura 16):

I-I	I-II	I-III	I-IV	I-V	I-VI
	II-II	II-III		II-V	II-VI
				V-V	V-VI

### 2.4.3 Partición prismática de un ortoedro (primer caso)

Un ortoedro con sus tres dimensiones diferentes puede partirse en dos prismas usando el plano determinado por dos diagonales paralelas de dos caras rectangulares opuestas. Salvo congruencias, hay tres formas de hacerlo ya que encontramos que hay tres diagonales de longitudes distintas y cada una de éstas conduce a prismas diferentes. Esos dos prismas tienen simetría central respecto al punto de intersección de las diagonales del

22. Particiones del ortoedro en pirámides triangulares (caso segundo) y desarrollos planos de la partición: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasOrtoedro2/particionesOrtoedro2.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasOrtoedro2/particionesOrtoedro2.html)

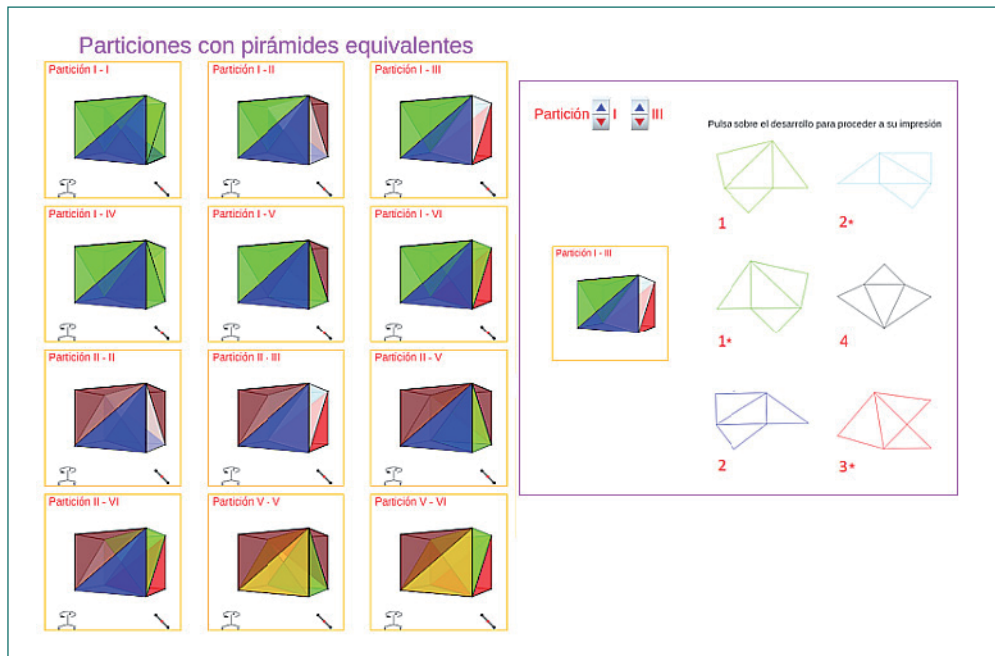


Figura 16. Particiones del ortoedro en pirámides triangulares (caso segundo) y desarrollos planos de la partición.


ortoedro. De las tres posibilidades indicadas mostraremos a continuación una de ellas. Las otras dos son análogas.

Según lo analizado en el apartado 2.3.4, cada uno de esos prismas puede partirse en pirámides triangulares equivalentes de seis formas diferentes (I, II, III, IV, V y VI).

	1	4	3*	3*	4	1
I	2	5	5*	2*	6	6*
	3	3	4*	1*	1*	4*

A su vez, cada partición está compuesta por tres pirámides y en ellas aparecen seis tipos que identificamos como 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Aplicando una simetría central se obtienen las siguientes congruencias entre las seis particiones:

	I	II	III	IV	V	VI
	IV	III	II	I	VI	V

La construcción del ortoedro se aborda considerando dos de las particiones del prisma anterior y yuxtaponiéndolas. Son 36 las posibilidades, resultado de  $\{I, II, III, IV, V, VI\} \times \{I, II, III, IV, V, VI\}$ , pero analizando las congruencias son doce las posibilidades<sup>23</sup> (ver figura 17):

I-I	I-II	I-III	I-IV	I-V	I-VI
	II-II	II-III		II-V	II-VI
				V-V	V-VI

#### 2.4.4 Partición prismática de un romboedro (segundo caso)

Un romboedro puede partirse en dos prismas usando el plano determinado por dos diagonales mayores que sean paralelas. Salvo congruencias, hay una única forma de hacerlo. Esos dos prismas tienen simetría central respecto al punto de intersección de las diagonales del romboedro y también tienen simetría especular respecto al plano de corte. Analizaremos a continuación la partición de ambos prismas.

- a) Según lo analizado en el apartado 2.3.3, uno de esos prismas puede partirse en pirámides triangulares equivalentes de seis formas diferentes (I, II, III, IV, V y VI), donde se indican las particiones congruentes con el mismo color.

I	1	II	3	III	4	IV	4	V	3	VI	1
	2		3*		5		6		2		6
	3		3		4		1		1		4

23. Particiones del ortoedro en pirámides triangulares (caso primero) y desarrollos planos de la partición: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasOrtoedro1/particionesOrtoedro1.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasOrtoedro1/particionesOrtoedro1.html)



Figura 17. Particiones del ortoedro en pirámides triangulares (caso primero) y desarrollos planos de la partición.

b) De manera análoga, el otro prisma puede partirse en pirámides triangulares equivalentes de seis formas diferentes (I', II', III', IV', V' y VI').

	1		3*		4*		4*		3*		1
I'	2	II'	3	III'	5*	IV'	6*	V'	2	VI'	6*
	3*		3*		4*		1		1		4*

La construcción del ortoedro se aborda considerando una de las particiones del primer prisma analizado y otra del segundo, yuxtaponiéndolas. Son 36 las posibilidades resultado de  $\{I, II, III, IV, V, VI\} \times \{I', II', III', IV', V', VI'\}$ . Pero por las congruencias indicadas basta considerar las resultantes de  $\{I, II, III, IV\} \times \{I', II', III', IV', V', VI'\}$ , que a su vez quedan reducidas a diez<sup>24</sup> (ver figura 18):

24. Particiones del romboedro en pirámides triangulares (caso segundo) y desarrollos planos de la partición: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasRomboedro2/particionesRomboedro2.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasRomboedro2/particionesRomboedro2.html)

I-I'	I-II'	I-III'	I-IV'
	II-II'	II-III'	II-IV'
		III-III'	III-IV'
			IV-IV'

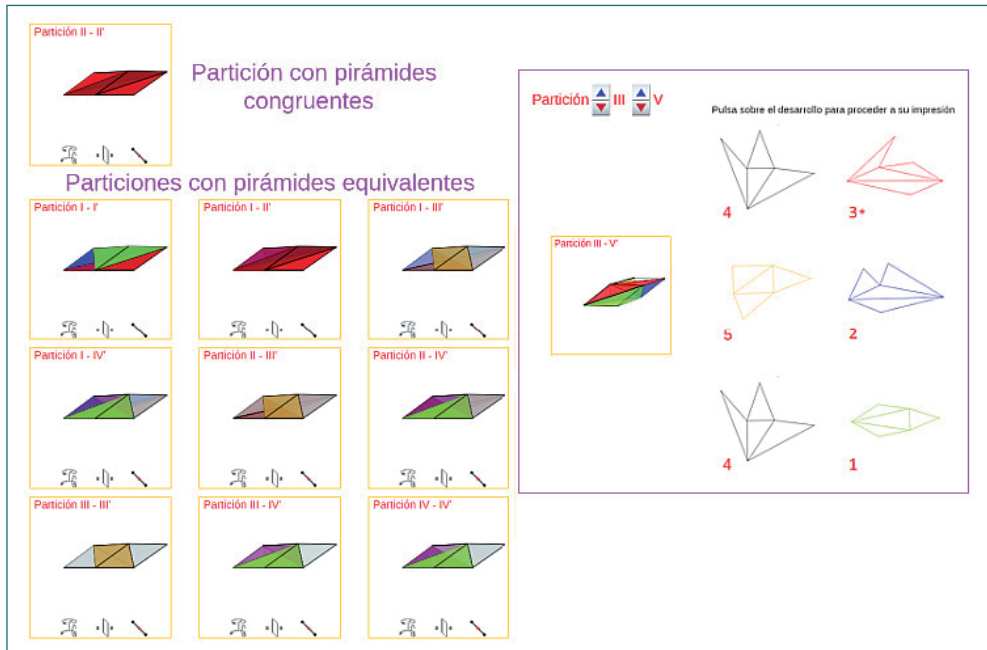


Figura 18. Particiones del romboedro en pirámides triangulares (caso segundo) y desarrollos planos de la partición.

### 2.4.5 Partición prismática de un romboedro (primer caso)

Un romboedro puede partirse en dos prismas usando el plano determinado por dos diagonales menores que sean paralelas. Salvo congruencias, hay una única forma de hacerlo. Esos dos prismas tienen simetría central respecto al punto de intersección de las diagonales del romboedro. Analizaremos a continuación la partición de ambos prismas.

- a) Según lo analizado en el apartado 2.3.2, uno de esos prismas puede partirse en pirámides triangulares equivalentes de seis formas diferentes (I, II, III, IV, V y VI), donde se indican las particiones congruentes con el mismo color.

I	1	II	3	III	1*	IV	1*	V	3	VI	1
	2		4		5		2*		4*		5
	2*		2*		6		2		2		6

b) De manera análoga, el otro prisma puede partirse en pirámides triangulares equivalentes de seis formas diferentes (I', II', III', IV', V' y VI').

I'	2	II'	2	III'	6	IV'	2*	V'	2*	VI'	6
	2*		4*		5		2		4		5
	1*		3		1		1		3		1*

La construcción del ortoedro se aborda considerando una de las particiones del primer prisma analizado y otra del segundo, yuxtaponiéndolas. Son 36 las posibilidades resultado de  $\{I, II, III, IV, V, VI\} \times \{I', II', III', IV', V', VI'\}$ . Pero por las congruencias indicadas basta considerar las resultantes de  $\{I, II, III\} \times \{I', II', III', IV', V', VI'\}$ , que a su vez quedan reducidas a doce<sup>25</sup> (ver figura 19):

I-I'	I-II'	I-III'	I-IV'	I-V'	I-VI'
	II-II'	II-III'		II-V'	II-VI'
		III-III'			III-VI'

25. Particiones del romboedro en pirámides triangulares (caso primero) y desarrollos planos de la partición: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasRomboedro1/particionesRomboedro1.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasRomboedro1/particionesRomboedro1.html)

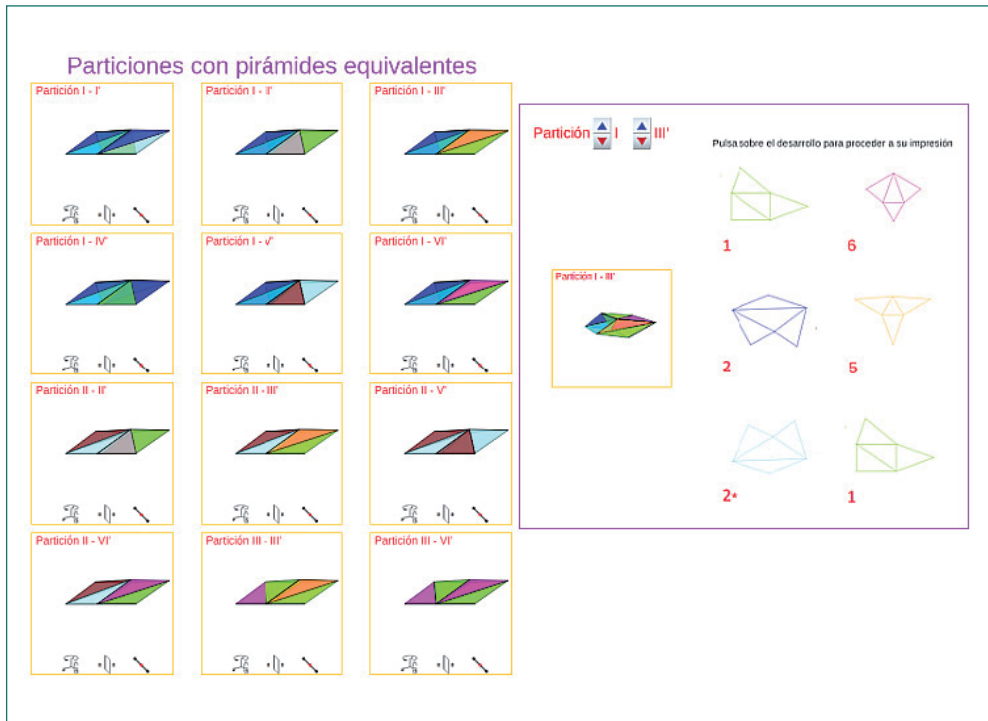


Figura 19. Particiones del romboedro en pirámides triangulares (caso primero) y desarrollos planos.

### 2.4.6 Partición prismática de un romboedro

Según lo analizado en el apartado 2.3.1 un prisma procedente de un romboedro puede descomponerse en seis particiones en las que intervienen doce pirámides triangulares diferentes y asimétricas. No existe ninguna congruencia entre estas particiones.

	1		4		6		6		4		1
I	2	II	5	III	7	IV	9	V	11	VI	12
	3		3		8		10		10		8

A partir de ese prisma, la construcción del romboedro sólo es posible mediante la aplicación de una simetría central. Este prisma simétrico podrá descomponerse a su vez en seis particiones que son simétricas de las anteriores y que estarán compuestas por las

respectivas pirámides simétricas<sup>26</sup> (de nuevo denotamos por 1\* la pirámide simétrica de la I, y análogamente el resto).

	3*		3*		8*		10*		10*		8*
I'	2*	II'	5*	III'	7*	IV'	9*	V'	11*	VI'	12*
	1*		4*		6*		6*		4*		1*

La yuxtaposición de esos dos prismas da lugar al romboiedro. Y consecuentemente las posibles particiones<sup>27</sup> del mismo son 36, resultantes de  $\{I, II, III, IV, V, VI\} \times \{I', II', III', IV', V', VI'\}$ .

Pero para realizar una cuantificación de todas las particiones prismáticas de un romboiedro hemos de tener en consideración que hay seis formas posibles de partirlo en dos prismas. Para cada pareja de caras opuestas hay dos posibilidades correspondientes a las dos diagonales, luego tres parejas por dos diagonales conducen a esas seis formas. Así pues, en el caso más general, son seis posibles particiones prismáticas del romboiedro y para cada una de ellas treinta y seis particiones diferentes en pirámides triangulares, por tanto, un total de 216 particiones. En ellas intervienen  $24 \times 6 = 144$  pirámides (72 pirámides y sus simétricas).

## 2.5. Escena interactiva general para la partición prismática de un paralelepípedo

Para dar la posibilidad de que cualquiera pueda seleccionar un tipo de paralelepípedo, aportar las dimensiones que desee al mismo, elegir la partición prismática que quiera y que pueda reproducirla en un modelo tangible, se aporta una escena interactiva<sup>28</sup> (ver figura 20) la cual cuenta con un menú con las siguientes opciones:

- Selecciona el paralelepípedo ABCDEFGH:
  - Cubo. La partición en dos prismas es única y la longitud de la arista no es significativa, por tanto, no es necesario introducir ningún dato adicional.
  - Ortoedro. Con dos controles numéricos Bx y Dy puede definirse cualquier ortoedro. La partición en dos prismas se efectúa siempre considerando el plano determinado por la diagonal AC y su paralela EG, por tanto, para

26. Pirámides en la partición de un romboiedro: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasRomboiedro/desarrolloPiramidesRomboiedro.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasRomboiedro/desarrolloPiramidesRomboiedro.html)

27. Particiones del romboiedro en pirámides triangulares y desarrollos planos de la partición: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasRomboiedro/desarrolloParticionesRomboiedro.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasRomboiedro/desarrolloParticionesRomboiedro.html)

28. Escena interactiva genérica para la partición prismática de un paralelepípedo: [http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales\\_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasCasoGeneral/index.html](http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/HexaedroPiramides-JS/interactivos/CongruenciasParalelepipedo/CongruenciasCasoGeneral/index.html)

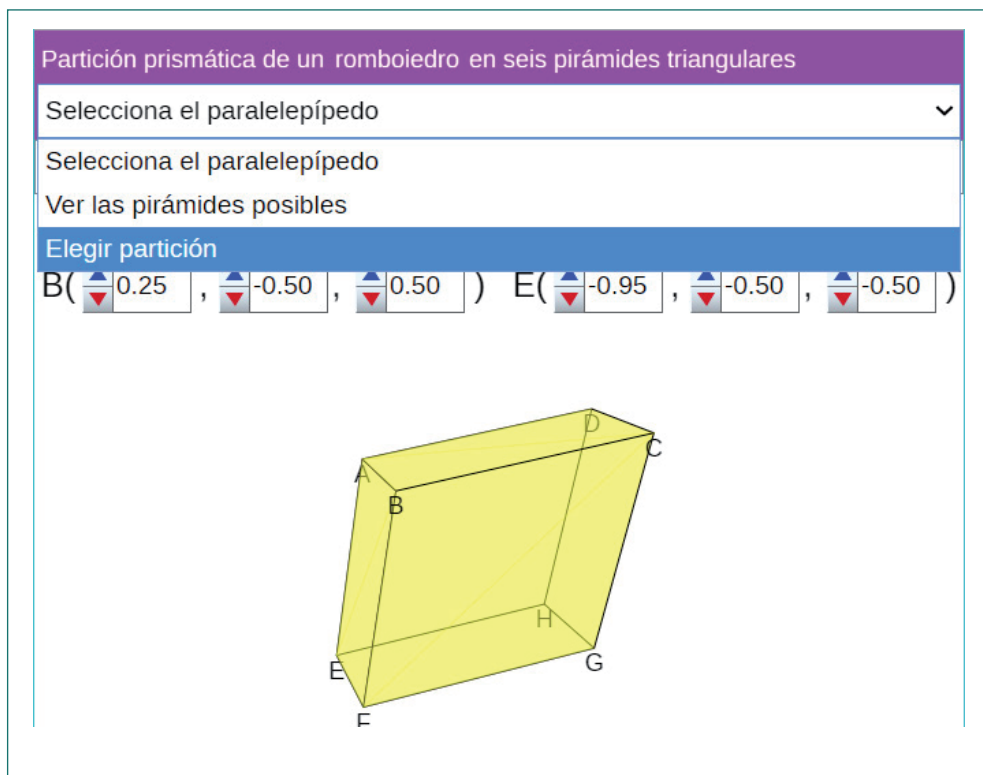


Figura 20. Menú en la escena interactiva genérica para la partición prismática de un paralelepípedo.

- obtener cada uno de los tres casos analizados anteriormente es necesario definir adecuadamente dichos controles.
- Romboedro cortando por la diagonal menor. Puede cambiarse el ángulo que define al romboedro y el corte en dos prismas se realiza por el plano ACGE determinado por dos diagonales menores paralelas.
  - Romboedro cortando por la diagonal mayor. Puede cambiarse el ángulo y en este caso el corte por el plano ACGE se corresponde con dos diagonales mayores paralelas.
  - Romboedro. Pueden cambiarse las coordenadas de los vértices A, B, D y E y el corte se efectúa, de nuevo, siempre por el plano ACGE.
  - Ver las pirámides posibles. Opción mediante la que se muestran los desarrollos planos de las diferentes pirámides que pueden aparecer en las particiones. Aquí, en una rápida visión, puede interpretarse que algún desarrollo no coincide con los observados en los casos particulares analizados, pero una atenta observación conducirá a que no es más que un desarrollo equivalente.
  - Elegir partición. Puede seleccionarse una de las 36 particiones posibles, ver las pirámides que intervienen en ella e imprimir su desarrollo.

## CONCLUSIONES

En este artículo se ha abordado la partición de un paralelepípedo en pirámides de caras cuadriláteras y pirámides triangulares estudio que generaliza otro anterior realizado por el autor y que estaba restringido al caso particular del cubo.

La partición en pirámides de base cuadrilátera presenta un esquema único basado en la consideración de un punto que se ubique bien en la frontera o bien en el interior del poliedro que vamos a partir, y considerando éste como cúspide común de las pirámides que conforman la partición se obtiene la partición mínima, formada por tres pirámides, cuando la cúspide coincide con un vértice del hexaedro. Si el punto seleccionado se ubica en una arista, en una cara o en el interior se generan sendas particiones formadas por cuatro, cinco y seis pirámides respectivamente.

La partición en pirámides de base triangular se aborda desde dos perspectivas: una basada en la división en dos de cada una de las pirámides cuadriláteras obtenidas en las particiones anteriores y otra mediante una construcción específica. La primera conduce a un mínimo de seis pirámides y la segunda permite obtener la partición mínima constituida por cinco pirámides. En el caso de seis pirámides las particiones se clasifican en prismáticas y no prismáticas.

Para cada tipo de paralelepípedo, según la regularidad intrínseca a cada uno, se han abordado las diferentes formas de partirlo en prismas y en cada caso se han analizado cuántas particiones diferentes, salvo congruencias, pueden obtenerse y los diferentes tipos de pirámides que las componen. En todos los casos se aportan escenas interactivas que permiten definir las dimensiones del paralelepípedo deseado y observar digitalmente las particiones, así como la posibilidad de imprimir los desarrollos planos de las pirámides.

En definitiva un estudio exhaustivo que comprende una amplia casuística y que surgió a raíz de la adaptación a *DescartesJS* de una escena<sup>29</sup> en la que se observaba una partición prismática de un cubo (Núñez Castaín, 2017) y en cada uno de los prismas, en los que quedaba dividido, aparecían diferentes tipos de pirámides equivalentes entre sí. Al abordar el análisis de la situación se comprobó que las referencias a las particiones de un cubo en pirámides quedaban planteadas de manera deslavazada o inconexa, mostrando sólo aquellos casos particulares en los que se encuentra mayor regularidad, pero no desde un punto de vista global e integrador. Eso fue el objetivo primario de estudio realizado en un artículo anterior (Galo-Sánchez, 2018) y el objetivo secundario su generalización a los paralelepípedos que es lo que aquí ha quedado realizado. La extensión a hexaedros convexos de caras cuadriláteras  $\{4,4,4,4,4,4\}$ , como poliedro no regular que puede considerarse similar al cubo, también ha sido realizada por el autor e implica algunas particularidades adicionales interesantes que serán objeto de una publicación ulterior.

---

29. Una descomposición del cubo [http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales\\_didacticos/cubo-JS/index.htm](http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/cubo-JS/index.htm)

## REFERENCIAS

- Galo Sánchez, J. (2018). Partición prismática de un cubo en seis pirámides triangulares equivalentes. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 1(2), 1-20. Recuperado el 18/10/2018, de <http://mesjournal.es/ojs/index.php/mes/article/view/12>.
- Nuñez Castaín, A. (2018). Una descomposición del cubo. *Recursos Educativos interactivos de la "Red Educativa Digital Descartes"*, Vol. III, Núm. 1. Recuperado el 18/10/2018, de <http://proyectodescartes.org/descartescms/descargas>.
- RED Descartes (2018). Recursos interactivos. *Recursos Educativos interactivos de la "Red Educativa Digital Descartes"*, Vol. III, Núm. 1. Recuperado el 18/10/2018, de <http://proyectodescartes.org/descartescms/descargas>.

## Cuatro referentes de mujeres actuales galardonadas en Matemáticas

Lucía Manzorro Castrillón,

Juan Núñez Valdés

Mencia Veas Lerdo de Tejada

*Departamento de Geometría y Topología.*

*Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla.*

**Resumen:** *En este artículo, escrito in memoriam de la matemática iraní Maryam Mirzakhani, primera mujer galardonada con la Medalla Fields, se presentan, como homenaje hacia ella y también para que sirvan de referentes y modelos, sobre todo a las alumnas de Secundaria y Bachillerato, las biografías de cuatro matemáticas también galardonadas con Premios en esa disciplina, que constituyen un paradigma de la ya creciente presencia de la mujer entre los matemáticos que consiguen estos Premios, que hasta la fecha parecían reservados exclusivamente a los varones.*

**Palabras clave:** *Mujeres premiadas en Matemáticas; Irit Dinur; Claire Voisin; Nalini Anantharaman; Sylvia Serfaty.*

## Four referents of current women awarded in mathematics

**Abstract:** *This article is written in memoriam of the Iranian mathematician Maryam Mirzakhani, the first woman awarded with the Fields Medal, in 2014. As a tribute to her and with the objective of that they serve as referents and models for the female students of Secondary and Baccalaureate, we show the biographies of four mathematician women also awarded prizes in that discipline, who constitute a paradigm of the growing presence of women among people who get these Awards, which seemed exclusively reserved to men.*

**Keywords:** *Women awarded in Mathematics; Irit Dinur; Claire Voisin; Nalini Anantharaman; Sylvia Serfaty.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Con ocasión de la celebración de determinadas actividades lúdicas en los centros de Secundaria y Bachillerato, como pueden ser, por ejemplo, las semanas culturales, los cada vez más frecuentes (afortunadamente) actos en favor de la igualdad de género o la conmemoración de fechas relevantes en la vida de los personajes que les dan nombre a esos centros, los profesores de Matemáticas suelen proponerles a sus alumnos la realización de exposiciones, talleres, murales, pósters u otros tipos de participación relacionados bien directa o indirectamente con las Matemáticas.

En ese contexto, una de las propuestas que los profesores más les suelen pedir a sus alumnos es la de realizar un trabajo de investigación relacionado con la mujer y las Matemáticas. Así, es muy frecuente encontrar entre los trabajos que presentan los alumnos las biografías de Hipatia, la Marquesa de Chatelet, Sophie Germain, Florence Nighthingale, Sophia Kowalewski o Emma Noether, entre otras.

Sin embargo, estas mujeres matemáticas cuyo estudio les propone el profesor o bien descubren los propios alumnos tienen la característica común de haber nacido todas ellas con anterioridad al siglo pasado, siendo sin embargo muy escasos (por no decir casi ninguno) los trabajos realizados por los alumnos que traten sobre mujeres matemáticas nacidas bien en el siglo pasado o en el actual.

La pregunta que surge entonces de manera natural es la siguiente: ¿pueden llegar a pensar los alumnos que no hay mujeres matemáticas relevantes que hayan nacido después de los últimos ciento veinte años?

Pues bien, para dar alguna respuesta a la pregunta anterior los autores presentan este artículo, cuya característica principal radica en que ha sido escrito en homenaje póstumo a Maryam Mirzakhani, la hasta el momento única mujer matemática galardonada con una Medalla Fields, máxima distinción que puede recibir un matemático por su trabajo, nacida en 1974 y tristemente fallecida en 2017, a los 40 años, a consecuencia de un tumor.

El motivo por el que los autores deseamos dedicarle este artículo a Maryam es fácil de explicar: simplemente, tratar de honrar su memoria. Maryam marcó un hito en 2014 cuando logró la Medalla Fields, tanto por la enorme trascendencia del premio en sí, como por el hecho de ser la primera mujer que conseguía tal distinción, reservada para los matemáticos que aún no hubiesen cumplido 40 años en el momento de su concesión y que hubiesen contribuido con sus investigaciones al desarrollo y avance de las Matemáticas.

Con tal fin, tres son entonces los objetivos de este artículo. El primero, mostrar cuatro referentes de mujeres de la actualidad que han conseguido Premios en Matemáticas, con el propósito de que sobre todo las alumnas de Secundaria y Bachillerato se fijen en ellas y les sirvan como ejemplo de los grandes logros que la mujer puede llegar a alcanzar a base de esfuerzo, interés, trabajo y tesón. El segundo es el de interesar tanto a profesores como a alumnos en la búsqueda de nuevos datos sobre estas mujeres o incluso sobre otras muchas más, también actuales, que pudiesen servir como base para ampliar los trabajos comentados anteriormente. Y como tercer objetivo, este ya más general aunque basado en los dos anteriores, está el procurar familiarizar a los profesores y alumnos de estos niveles con la Historia de las Matemáticas, recurso generalmente nada utilizado por el profesorado, lo cual, en opinión de los autores supone un grave error y un gran retraso.

Figura 1. Maryam Mirzhakani recibiendo la Medalla Fields de manos de la entonces presidenta de Corea del Sur Park Geun-hye. Fuente: AFP PHOTO / THE SEOUL ICM 2014.



Por ello, como homenaje a Maryam, los autores presentamos en este artículo unas breves biografías de cuatro mujeres contemporáneas que también han sido galardonadas con numerosos Premios en Matemáticas. Ellas son la matemática israelí Irit Dinur, poseedora de varios Premios en Matemáticas y actualmente profesora de Ciencias de la Computación en el Instituto Weizmann de Ciencias en Rehovot, Israel, una de las personas más reconocidas en Ciencias de la Computación y Matemáticas, la matemática francesa Claire Voisin, galardonada, entre otras distinciones, con las tres Medallas que otorga el Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) de Francia: la de Bronce, en 1988, la de Plata, en 2006 y finalmente la de Oro, en 2016, la más alta distinción científica que se concede anualmente en Francia desde hace ya casi setenta años y otras dos matemáticas también francesas, Nalini Anantharaman (de ascendencia india) y Sylvia Serfaty, de las que puede decirse que llevan unas vidas totalmente paralelas, pues ambas nacieron en París, Sylvia en 1975 y Nalini un año después (esta es una de las escasas diferencias existentes entre ellas), ambas coincidieron como estudiantes en la misma clase de la Escuela Normal Superior de París, ambas trabajaron en proyectos de investigación del CNRS y ambas son, hasta el momento, las dos únicas mujeres ganadoras del Premio Poincaré, instituido por la Asociación Internacional de Física Matemática, que es uno de los Premios más notables que se conceden, tras la Medalla Fields, y, para mayor coincidencia, ambas en el mismo año, 2012.

Estas cuatro mujeres son merecedoras de un doble reconocimiento por la sociedad: el que se les debe por su trabajo y el que se les debe por el hecho de haber alcanzado ese éxito siendo mujeres y por tanto habiendo padecido en determinados momentos discriminaciones de género para conseguirlo.

La estructura de este artículo es la siguiente: a esta Introducción le siguen siete secciones. En la primera de ellas se da una breve descripción de los principales Premios que se conceden en la actualidad en Matemáticas. En la siguiente se da cuenta del fallecimiento de Maryam Mirzhakani y se incluye una mini biografía de ella. Las siguientes cuatro secciones, 4, 5, 6 y 7, se dedican, respectivamente, a glosar la obra científica de cada una de esas cuatro mujeres anteriormente indicadas. En la sección 8 se indican algunas conclusiones obtenidas por los autores como consecuencia de la realización de esta investigación.

## 2. PRINCIPALES PREMIOS EN MATEMÁTICAS

A la luz de nuestro conocimiento, no existe en la actualidad ninguna clasificación oficial de los Premios que se conceden en Matemáticas, salvo la propuesta oficiosa realizada por uno de los autores de este artículo en (Núñez, 2018).

En dicha aportación, el autor, a nivel exclusivamente personal, se atrevió a proponer una clasificación de estos premios en 3 categorías o grupos en función de su grado de trascendencia, relevancia e importancia en la consideración y reconocimiento de la sociedad. No obstante, hay que aclarar que el criterio que él consideró es muy subjetivo y por tanto muy poco rigorista o matemático, que ya se basa en conceptos de difícil precisión: poca o mucha trascendencia, poco o mucho reconocimiento, etc, si bien los autores consideramos que constituye una buena aproximación a la realidad. Estos 3 grupos serían los siguientes:

- Grupo 1: Premios de elevado prestigio para todos: Aquellos que poseen un altísimo grado de trascendencia, relevancia e importancia en la consideración de la sociedad, siendo reconocida su concesión por toda ella y no solo por la comunidad científica en general o por la matemática en particular.  
A este grupo únicamente pertenecen las Medallas Fields.
- Grupo 2: Premios de un prestigio menor para la sociedad: aquellos cuya trascendencia, relevancia e importancia en la consideración de la sociedad es elevada, aunque bastante menor que los del grupo anterior, haciéndose eco de su concesión únicamente la comunidad científica y no toda la sociedad.  
Entre ellos (por orden cronológico de su institución) se incluyen los Premios Abel, Wolf, Erdős, Nevanlinna, Gödel y Poincaré.
- Grupo 3: Premios de limitado prestigio para la sociedad: Aquellos de carácter más cerrado o local, cuya trascendencia, relevancia e importancia se ciñen casi exclusivamente al ámbito en el que se convocan.

Entre ellos se pueden citar (por orden alfabético) los siguientes: los Premios Adams, Berwick, Bôcher, Bolyai, Chauvenet, Clay, Cole, Élie Cartan, Fermat, Fröhlich, Fulker-son, Carl Friedrich Gauss, Sophie Germain, Harry, Infosys, King Faisal, Leconte, Leelavati, Loève, Hua Loo-Keng, Kenneth O. May, Morgan, Naylor, Nemmers, Ostrowski, Pólya, David P. Robbins, Abdus Salam, Salem, Rolf Schock, Ruth Lyttle Setter, Shaw, Leroy Steele, Oswald Veblen, Whitehead, y varios otros más, así como también las siguientes medallas: Medalla Cantor, Medalla Chern, Medalla Copley, Medalla De Morgan, Medalla Dirac, Medalla Euler, Medalla Guy, Medalla Lobachevski, Medalla Real, Medalla Sylvester Medal y la Medalla Nacional de Ciencia, entre varias otras más.

En este Grupo también podrían estar integrados dos Premios que patrocina, total o parcialmente, la Real Sociedad Matemática Española: el Premio José Luis Rubio de Francia y el Premio Vicent Caselles.

Puede verse una completa y detallada descripción de las características de todos estos Premios en Matemáticas en la referencia (Núñez, 2018), anteriormente citada. En todo caso, pasamos a continuación a describir las principales características de dos de los Premios que más se resaltan en este artículo, haciendo especial hincapié en la presencia de las mujeres entre la relación de galardonados. Son las siguientes:

- Las Medallas Fields (Grupo 1) fueron creadas en honor del matemático canadiense John Charles Fields en 1936. Se conceden de dos a cuatro medallas cada cuatro años a matemáticos menores de 40 años. Hasta 2017 se han concedido 56 medallas, de las cuales solo una ha correspondido a una mujer (a la ya citada Maryam Mirzakhani).
- El Premio Poincaré fue creado por: Asociación Internacional de Física y Matemáticas, en 1997, en honor del matemático francés Henri Poincaré. Su periodicidad es cada tres años, concediéndose 3 galardones en cada edición. Hasta 2017 ha habido un total de 23 premiados, de los cuales solo dos son mujeres (las ya citadas Nalini Anantharaman y Sylvia Serfaty).

### 3. MARYAM MIRZHAKANI: SU FALLECIMIENTO

Aunque no puede decirse que fuera de manera completamente inesperada, pues padecía un cáncer de mama detectado algún tiempo atrás, el sábado 14 de julio de 2017 falleció a los 40 años, en el Stanford University Medical Center, de Palo Alto, California, (EE.UU.), Maryam Mirzakhani, la primera mujer galardonada con la Medalla Fields de la historia, en 2014.

Sin embargo, es bastante probable que esta noticia haya pasado desapercibida para muchos profesores universitarios de Matemáticas y muchísimos más de esa misma disciplina de Secundaria y Bachillerato, quienes, seguramente, no habrían oído hablar de ella con anterioridad.

Maryam, la única mujer ganadora de una Medalla Fields hasta el presente, fue galardonada con esta distinción el día 13 de agosto de 2014, en Seúl, año en el que ella era becaria de investigación en el Instituto Clay de Matemáticas y profesora de la Universidad de Princeton. El Jurado le concedió ese galardón en atención a las siguientes razones: “*Por sus contribuciones sobresalientes a la dinámica y la geometría de las superficies de Riemann y sus espacios modulares*”. Como anécdota, indicar que, a pesar de que los derechos de las mujeres no están demasiado reconocidos en su país, el Presidente de la República Islámica de Irán en ese año, Hassan Rouhani, la felicitó muy efusivamente en persona. Por su parte, la profesora Frances Kirwan, miembro del comité responsable de escoger a los premiados de la Universidad de Oxford, dijo en aquel momento:

Espero que este premio inspirará a muchas más chicas y jóvenes, en este país y alrededor del mundo, a creer en sus propias habilidades y a fijarse como objetivo ser las premiadas con la Medalla Fields del futuro”.

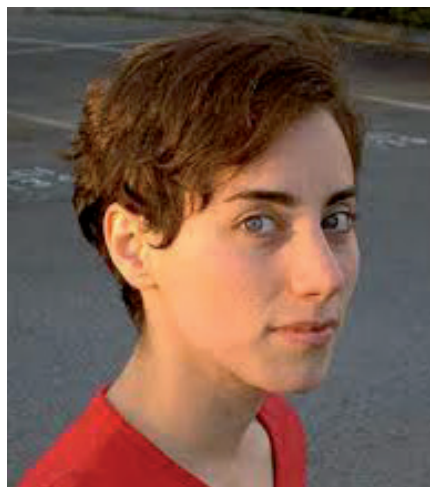


Figura 2. Maryam Mirzakhani. Fuente: Imágenes de wikipedia



Figura 3. Maryam Mirzakhani, recordada en su fallecimiento. Fuente: Imágenes de wikipedia.

Maryam había nacido en Teherán, Irán, en 1977 y desde un primer momento empezó a destacar por su gran talento e inteligencia. Así, ella y su amiga Roya Beheshti, dos mujeres iraníes muy adecuadamente preparadas en 1994, cuando Maryam tenía 17 años, consiguieron formar parte del equipo iraní que participó en la Olimpiada Matemática Internacional, celebrada en Hong Kong, donde ella fue capaz de obtener una de las Medallas de Oro de la prueba, convirtiéndose así en la primera alumna iraní que conseguía esta proeza. Y no acabó aquí todo, pues al año siguiente, de nuevo en la Olimpiada Internacional de Matemáticas de 1995, esta vez en Canadá, Maryam se convirtió en la primera estudiante iraní que conseguía todos los puntos posibles de la prueba (42), ganando por ello además dos Medallas de Oro.

Tras su fallecimiento, Marc Tessier-Lavigne, rector de la Universidad de Stanford, afirmó de ella lo siguiente:

Maryam se fue demasiado pronto, pero su legado permanecerá en las miles de mujeres a las que inspiró. Era una brillante teórica y también una persona humilde que aceptó honores solo en la esperanza de que podrían animar a otros a seguir su camino. Su contribución como académica y como modelo de motivación es significativa y duradera,

mientras que el anteriormente citado Presidente de Irán, Hasan Rouhani, dijo que la muerte de Mirzakhani le causó “*gran pena*”, según informó la prensa estatal iraní. Por su parte, su Ministro de Exteriores, Javad Zarif, dijo que (el fallecimiento de Maryam) “*era causa de dolor para todos los ciudadanos de ese país*”. A su vez, el Portavoz del Gobierno Iraní Ali Larijani lamentó en un mensaje de Instagram la muerte de Maryam, aunque fue muy criticado en las redes sociales por usar para ello una imagen vieja de ella, luciendo el velo islámico (véase Figura 3).

“Hoy se apagó una luz. Me rompe el corazón...se ha ido lejos demasiado pronto”, escribió también en su cuenta de Instagram el científico iraní-estadounidense Firouz Naderi, quien se preguntó en otro mensaje: “¿Un genio? Sí, pero también una hija, una madre y una esposa”.

Para una mayor información tanto sobre las Medallas Fields en Matemáticas como sobre la vida y obra de Maryam puede consultarse (Núñez et al, 2016), un artículo de dos de los mismos autores de este.

En su honor, los autores deseamos finalizar esta sección con una cita de ella misma: *“La belleza de las Matemáticas sólo se muestra a los seguidores más pacientes”*.

#### 4. IRIT DINUR

En Ciencias de la Computación y más concretamente en teoría de la Complejidad Computacional, una “clase de complejidad” es un conjunto de problemas de decisión de complejidad relacionada, es decir, un conjunto de problemas de decisión que pueden ser resueltos por una máquina  $M$  utilizando el orden  $O(f(n))$  del recurso  $R$ , donde  $n$  es el tamaño de la entrada. Pues bien, una de estas clases es la denominada PCP, acrónimo de “pruebas verificables probabilísticamente” (en inglés, *probabilistically checkable proofs*), que son pruebas que pueden ser verificadas muy rápidamente usando técnicas probabilísticas. Asimismo, en dichas ciencias, la “dureza de la aproximación” es una rama que estudia la complejidad algorítmica de encontrar soluciones casi óptimas para los problemas de optimización.



Figura 4. Irit Dinur. Fuente: Imágenes de wikipedia.

Actualmente, la matemática israelí Irit Dinur, profesora de Ciencias de la Computación en el Instituto Weizmann de Ciencias (en Rehovot, Israel) es una de las personas más reconocidas en Ciencias de la Computación y Matemáticas, centrándose su investigación en Ciencias de la Computación y Combinatoria, especialmente en las PCPs y en el de la dureza de la aproximación (web1).

No se conocen muchos datos en la literatura sobre la infancia, primeros estudios y estudios universitarios de Irit.

Irit obtuvo su doctorado en 2002, en la Escuela de Informática de la Universidad de Tel Aviv, bajo la dirección del profesor Shmuel Safra, con una Tesis Doctoral titulada “On the Hardness of Approximating the Minimum Vertex Cover and The Closest Vector in a Lattice”.

Desde ese momento, Irit se planteó seguir estudiando PCPs y sus consecuencias, particularmente para problemas de dureza de aproximación. Su objetivo principal era fortalecer a los PCPs conocidos y obtener una mejor comprensión de la aproximabilidad, ocupándose también del fenómeno de la “robustez” en contextos combinatorios y analíticos.

Irit se unió al Instituto Weizmann después de visitar el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, Nueva Jersey y la Universidad de California, en Berkeley. Sus trabajos y la publicación en 2006 de una nueva demostración del Teorema PCP mucho

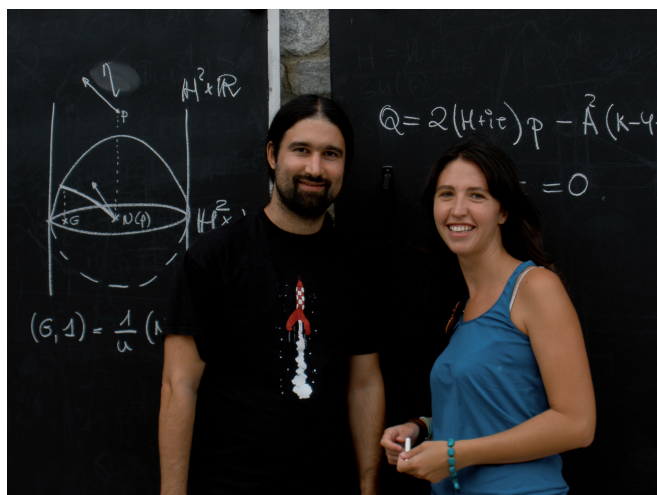


Figura 5. Los matemáticos españoles. Pablo Mira e Isabel Fernández. Fuente: Imágenes de wikipedia



Figura 6. Irit Dinur. Fuente: Imágenes de wikipedia.

más simple que las anteriormente conocidas la hicieron merecedora de varios galardones. Así, ganó el Premio “Anna y Lajos Erdős” en Matemáticas en 2012 y un “Premio Michael Bruno Memorial” en 2007.

En el XXVI Congreso Internacional de Matemáticas (ICM) celebrado del 19 al 27 de agosto de 2010 en la ciudad de Hyderabad (India), fue invitada a dar una conferencia plenaria (al igual que también lo fueron los matemáticos españoles Isabel Fernández Delgado (Linares, 1979), profesora de Matemática Aplicada en la Universidad de Sevilla y Pablo Mira Carrillo (Murcia, 1977), profesor de la Universidad Politécnica de Carta-

gena, en Murcia y Premio José Luis Rubio de Francia, otorgado por la Real Sociedad Matemática Española, en 2007. La charla de ambos fue sobre “superficies de curvatura media constante”. Ello constituyó todo un honor y el reconocimiento de la comunidad matemática mundial al espectacular avance tenido por las Matemáticas españolas en los últimos años).

Irit tiene una Starting Grant y a fecha finales de julio de 2017 continúa desarrollando su trabajo en el Departamento de Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación en “The Weizmann Institute of Science”, en Rehovot, Israel.

Aunque lo que sigue pertenece exclusivamente al ámbito personal y obviamente no posee ninguna relación con su investigación, lo comentamos en estas líneas porque ella nunca ha tenido el menor problema en definirse como “matemática y homosexual”, tal como escribió en un “post” (web2) que ella misma redactó con motivo del “Turing

Centennial” en el año 2012, año del centenario del nacimiento del matemático británico Alan Turing, considerado como el padre de la inteligencia artificial. Ella afirma que el hecho de ser mujer y homosexual la convierte en una minoría dentro de una minoría. Sin embargo, también dice que, aunque nunca ha conocido a ningún otro compañero en el Instituto Weizmann que se reconozca como tal, ella nunca ha percibido ningún tipo de exclusión y siempre ha sentido dicha comunidad como un lugar libre y acogedor.

## 5. CLAIRE VOISIN

La matemática francesa Claire Voisin nació el 4 de marzo de 1962 en Saint-Leu-la-Forêt, cerca de París, ingresando en 1981, a los diecinueve años, en la división de Ciencias de la École Normale Supérieure de Sévres. Tras serle concedida una “agrégation” (el diploma docente más alto de Francia) en Matemáticas en 1983, obtuvo en 1986 su doctorado en la Université Paris-Sud bajo la dirección de Arnaud Beauville, siendo contratada al poco de terminar su tesis doctoral por el CNRS, primero en Orsay y después en el Instituto de Matemáticas de Jussieu (recuérdese que el Centre National de la Recherche Scientifique o CNRS es la institución de investigación más importante en Francia, figurando en la novena posición de la clasificación de instituciones similares en el mundo y en el primer puesto de Europa, según la clasificación mundial “Webometrics”, que mide la visibilidad en la web de los organismos de investigación).



Figura 7. Claire Voisin. Fuente: Imágenes de wikipedia.

Tras pasar una temporada como profesora en el Institut des Hautes Études Scientifiques desde 2007 hasta 2009, Claire fue también profesora a tiempo parcial en la École polytechnique desde 2012 hasta 2014. Fue elegida miembro de la Académie des Sciences en 2010, y fue la primera matemática femenina admitida en el Collège de France en 2016. Desde ese mismo año es profesora de Geometría Algebraica en el Collège de France y miembro de la Académie des Sciences de París, recibiendo en ese año de 2016, en septiembre, la medalla de oro del CNRS, el máximo galardón científico en Francia.

Antes de dar una Conferencia Plenaria en el Congreso Internacional de Matemáticos de 2010, en Hyderabad, fue conferenciante invitada en el ICM de Zurich en 1994. Fue también profesora visitante distinguida en IAS (Princeton, 2014-2015) e invitada Senior fellow de ETH (Zurich 2017). Es asociada extranjera de la Academia Nacional de Lincei y de la Academia Nacional de Ciencias.

Con referencia a los Premios en Matemáticas que Claire ha conseguido, destacan fundamentalmente las tres Medallas del CNRS: la de de Bronce, en 1988, la de Plata, en 2006 y finalmente la de Oro, en 2016, la más alta distinción científica que se concede anualmente en Francia desde hace ya casi setenta años. De entre quienes han recibido



Figura 8. Claire Voisin en una de sus clases. Fuente: Imágenes de wikipedia.

esta última medalla, solo 6 han sido matemáticos y solo 4 han sido mujeres. Las otras tres científicas galardonadas con este premio estaban especializadas en egiptología, embriología y biología del desarrollo.

Aparte de estas tres distinciones anteriores, Claire ganó el Premio de la Sociedad Matemática Europea en 1992, el Premio Servant, que le fue concedido por la Academia de Ciencias en 1996, el Premio Sophie Germain en 2003, el Premio Ruth Lyttle Satter en 2007 (por su trabajo sobre la Conjetura de Kodaira, que resolvía el caso más general de la Conjetura de Green sobre las sizigias de la inmersión canónica de una curva algebraica, dejando con ello abierta, aunque solo parcialmente, la conjetura para curvas arbitrarias), el Premio Clay de Investigación en 2008 (por su refutación de la Conjetura de Kodaira sobre deformaciones variedades de Kähler compactas) y el Premio Heinz Hopf en 2015.

Claire también ha ocupado puestos de relevancia en diferentes instituciones de prestigio dentro de la comunidad matemática internacional. Además de, como ya se ha indicado, haber sido invitada para impartir una conferencia plenaria en los ICMs de Zurich, en 1994, y de Hyderabad, en 2014, dentro de la sección de Geometría Algebraica, fue nombrada “Chevalier” de la Legión de Honor en 2008 y admitida como miembro extranjero de las Academias de Leopoldina (Alemania) y del Liceo (Italia).

En 2014 en admitida como miembro de la Academia Europea (organización científica europea no gubernamental fundada en 1988. Sus miembros son científicos y académicos que en conjunto tienen por objeto promover el aprendizaje, la educación y la investigación) y en mayo de 2016 miembro extranjero asociado de Academia Nacional de Ciencias (corporación estadounidense cuyos miembros actúan como consejeros de la nación en ciencia, ingeniería y medicina). Ese mismo año de 2016 (el annus mirabilis para Claire) llegó a ser la primera mujer matemática miembro del Colegio de Francia y la primera titular de la Cátedra de Geometría Algebraica y también obtuvo la Medalla de Oro del CNRS en septiembre). Este último galardón es el máximo Premio que se concede a la Investigación Científica en Francia. Ya en 2017, recibió el Premio Shaw en Ciencias Matemáticas.

Actualmente, Claire es profesora en el Collège de France, ocupando la cátedra de Geometría Algebraica desde el 2 de junio de 2016, en la que trabaja en estructuras de Hodge y simetría especular. Ha escrito varios libros sobre la Teoría de Hodge y de hecho llegó a probar en 2002 que la generalización de la conjetura de Hodge para variedades Kähler

compactas es falsa. Esta conjetura fue uno de los siete Problemas del Milenio propuestos por el Instituto Clay de Matemáticas en el año 2000, dotados cada uno de ellos con un premio en metálico de un millón de dólares (este Instituto es una fundación sin fines de lucro de Cambridge, Massachusetts, dedicada a incrementar y diseminar el conocimiento matemático, que patrocina varios premios e incentivos para matemáticos prometedores, entre ellos los “Problemas del Milenio, instituidos en el año 2000, dotados con la suma de un millón de dólares cada uno).

Además de todos esos Premios, Claire está muy reconocida como matemática. Pertenece o ha pertenecido al Comité Editorial de diferentes publicaciones, de especial significación en el ámbito de la investigación en Matemáticas.

Entre ellas pueden destacarse *Mathematische Zeitschrift* (1997-2004), *Annales de l'ENS* (1999-2004), *Journal of Algebraic Geometry* (2004-2007), *Journal of the European Math. Society (JEMS)* (1998-2014), *J. Differential Geometry* (2004-2007), *Duke Math. Journal* (1996-2009) y *Forum of Mathematics Sigma* (2013-2014).

No obstante, esta vida de excelencia matemática no le ha impedido formar una familia (está casada con el matemático Jean-Michel Coron, del área de Matemáticas Aplicadas y es madre de 5 hijos) y según la investigadora, para conciliar ambos mundos ha sido fundamental la ayuda de su marido y el excelente sistema francés de cuidado infantil.

En una mini-entrevista que le hicieron (web3), ella responde así a la petición del entrevistador de que ella le explicara su investigación a una persona no especialista:

Yo estoy trabajando en la geometría algebraica. En geometría algebraica, nos dan variedades de una manera muy algebraica, a través de sus espacios de funciones algebraicas. Una parte importante de la geometría algebraica es, de hecho, álgebra conmutativa (...) Uno de mis principales intereses es la topología de los espacios topológicos.

Más datos sobre la biografía personal y científica de Claire pueden verse en (webs 4 y 5).

## 6. NALINI ANANTHARAMAN

La matemática francesa, de origen indio, Nalini Florence Anantharaman nació el 26 de Febrero de 1976 en París, en el seno de una familia de intelectuales, pues tanto su padre como su madre eran profesores de universidad.

Nalini creció en Orleáns, ciudad en la que sus padres trabajaban en la universidad como profesores de Matemáticas e investigadores, lo cual hizo que ella, ya desde pequeña, viviera en un ambiente de intelectuales matemáticos y conviviese a diario con la idea de convertirse en estudiosa de esa disciplina.



Figura 9. Claire Voisin en 2014 en la Queen Mary University of London.  
Fuente: Imágenes de wikipedia.



Figura 10. Nalini Anantharaman. Fuente: Imágenes de wikipedia.

Por ello, ya desde pequeña, Nalini prefería las asignaturas de ciencias y pensó en ser lo que es ahora: una investigadora apasionada de lo que estudia. Así, tras cursar los estudios preuniversitarios, en los que incluso tanteó la posibilidad de dedicarse a la música, Nalini se decantó por estudiar una carrera de ciencias en la Universidad Pierre et Marie Curie.

Hasta el primer año en el ENS (École Normale Supérieure) hizo conjuntamente Matemáticas y Física, pero tras unas prácticas de Física Experimental se dio cuenta de que el mundo abstracto le era mucho más atractivo. Por ello, se especializó en Matemáticas.

Nalini realizó su Tesis Doctoral en Matemáticas, en la Universidad de Pierre et Marie Curie, bajo la dirección del profesor François

Ledrappier en el año 2000, con el título “Géodésiques fermées d’une surface sous contraintes homologiques”, comenzando así su carrera profesional.

Entre 2001 y 2006 fue maestra de conferencias de la “Université de mathématiques pures et appliquées” en el “Ecole normale supérieure de Lyon”, donde ella ya había estado anteriormente como estudiante preuniversitaria.

En 2007, se unió al CNRS y simultáneamente ocupó el puesto de profesora de Matemáticas en la Escuela politécnica. Un año más tarde fue a la Universidad de California, en Berkeley, como profesora visitante; además de dar conferencias en Lyon y París.

En 2009, ya pasó a ser profesora titular de la Universidad de París-Sur, en Orsay. De Enero a Junio de 2013 estuvo en el Instituto de estudios avanzados de Princeton, y en 2014 obtuvo el cargo de catedrática en la Universidad de Estrasburgo y se convirtió en miembro del IRMA (Instituto de Investigación Matemática Avanzada).

Actualmente, Nanili es vicepresidenta de la Sociedad Matemática de Francia y profesora en el Laboratorio de Matemáticas de Orsay (CNRS/ Universidad de París-Sur). En su trabajo, su investigación se centra en los sistemas dinámicos, las ecuaciones de derivadas parciales, el análisis semi-clásico, la física matemática y la teoría espectral. Más específicamente, en todo lo que concierne a la localización o deslocalización de soluciones de ecuaciones de ondas en diversos contextos, como la ecuación de Schrodinger sobre variables, caos cuántico, o el modelo de Anderson.

Siempre apasionada por (en sus propias palabras) “descubrir dominios o de desarrollar la comprensión del desorden y el caos”, el estudio de las Matemáticas ha resultado muy satisfactorio para Nanili, no solo por su amor a esta ciencia sino por los numerosos premios que ha ganado.

Así, a día de hoy ha sido galardonada con el premio Gabrielle Sand y Marie Guido Triossi de la Academia de Ciencias (en 2007), el premio Raphael Salem (2010), por sus trabajos matemáticos sobre la las series de Fourier y el Jacques Herbrand de la Academia de Ciencias (en 2011).

Uno de los más importantes galardones que ha conseguido ha sido precisamente el prestigioso premio Henri Poincaré, que obtuvo en 2012, que la ha permitido convertirse en una de las dos primeras mujeres a las que se les concede. El jurado acordó concederle ese Premio por la siguiente razón:

“Nalini Anantharaman es galardonada por sus contribuciones originales al área del caos cuántico, sistemas dinámicos y ecuaciones de Schrödinger, incluyendo un notable avance en el problema de la ergodicidad única cuántica.”

Nalini nunca se planteó la posibilidad de que una mujer fuera o no capaz de ser una científica, a pesar de que la sociedad, tanto en sus comienzos como en la actualidad, está muy marcada por la más que mayoritaria presencia masculina en este ámbito. Además, de su amplitud de miras dan sentida cuenta sus propias palabras (web6):

Es un privilegio crear cosas hermosas sin tener que estar preocupados por su aplicación o utilidad. Lamento, no obstante, no ser capaz de ser más útil en un mundo donde pasan cosas terribles, ni de estar en una posición que me permita reparar el mal cometido.

Finalmente (aunque hasta ahora), en 2013 fue premiada con la “Médaille d’Argent” de la CNRS.

Más datos biográficos sobre su vida y obra pueden verse en (webs 6 y 7).



Figura 11. Nalini Anantharaman.  
Fuente: Imágenes de wikipedia.



Figura 12. Nalini Anantharaman.  
Fuente: web6.

## 7. SYLVIA SERFATY

A Sylvia Serfaty, nacida en París en 1975, siempre le han gustado las Matemáticas, probablemente por haber crecido, al igual que Nalini Anantharaman, en el seno de una familia de intelectuales. Su padre, arquitecto, es considerado por ella misma como un artista, y su madre es profesora.

Su pasión por las Matemáticas comenzó en el instituto. En una entrevista que le hicieron a raíz de haber conseguido el Premio Poincaré, ella cuenta (web3) que un día tenían que hacer problemas como tarea de casa. Había uno que parecía muy difícil, y ella le dio muchas vueltas, hasta llegar a una solución. Al corregirlo en clase, descubrió que su solución no era la requerida, pero la propuso como alternativa, “y creo que todos se quedaron sorprendidos, incluso la profesora”. Ese día, Sylvia se fue muy contenta a su casa,



Figura 13. Sylvia Serfati. Fuente: web6.

porque había conseguido algo que ella admiraba, y sigue admirando: ser una artista como su padre, dar una solución creativa.

Así, a pesar de que es costumbre pensar que un matemático es un genio o un prodigio, ella afirma que lo que verdaderamente le empujó a intentar conseguir sus metas no fue un don especial por las Matemáticas, sino que:

Requirió mucha fe y creer en mi pequeño sueño. Mis padres me dijeron: Tú puedes hacer cualquier cosa, deberías intentarlo. Y también mi primera profesora en la universidad jugó un papel importante al creer firmemente en mi potencial.

Sylvia entró en el Instituto Louis Legrand y más tarde en la Escuela Normal Superior, en el mismo curso que Nalini. Y en 1995 obtuvo su máster en Matemáticas. “*Me gustaba su belleza y el desafío*”, afirmaba de las Matemáticas.

En 1996 comenzó a preparar la tesis doctoral sobre la ecuación de Ginzburg-Landau de la superconductividad, en la Universidad París-Sur, bajo la dirección del profesor Fabrice Bethuel.

Tras conseguir su doctorado en 1999, comenzó a trabajar como “*chargée de recherche*” (investigadora) en el CNRS y en 2002 es habilitada para dirigir investigaciones en la Universidad de Pierre et Marie Curie, uno de los cargos más altos que una persona puede recibir dentro de la universidad.

De 2001 a 2007, Sylvia estuvo trabajando en el “*Courant Institute of Mathematical Sciences*”, en el departamento de Matemáticas de la Universidad de Nueva York como profesora asociada, y después, hasta 2009, ocupó el puesto de “*Global distinguished Professor*”, que tuvo que compaginar con ejercer de profesora en la Universidad de Pierre et Marie Curie VI hasta 2016.

Sylvia ha conseguido numerosos premios a lo largo de su carrera. En 2003 recibió la beca de investigación de la Fundación Sloan y el premio NSF CAREER. En 2004 fue galardonada con el premio de la Sociedad Matemática Europea. En 2006 fue invitada al Congreso Internacional de Matemáticas, en 2007 consiguió el premio EURYI (European Young Investigator) y en 2012 recibió el anteriormente mencionado Premio Henri Poincaré, convirtiéndose así, junto con su compañera de estudios y de trabajo, Nalini, en una de las dos primeras mujeres en conseguirlo.

El jurado del Premio Poincaré acordó concederle ese galardón a Sylvia por la siguiente razón:

Sylvia Serfaty es galardonada por su meritorio trabajo sobre la teoría de ecuaciones de Ginzburg-Landau, incluyendo progresos notables en la prueba rigurosa del inicio de la redícula Abrikosov en la teoría de la superconductividad”



por Maryam. Estas cuatro mujeres son la matemática israelí Irit Dinur y las matemáticas francesas Claire Voisin, Nalini Anantharaman y Sylvia Serfaty, las dos últimas galardonadas con el muy prestigioso Premio Poincaré en Matemáticas (véase (web9) para mayor información al respecto de este Premio).

Otro de los objetivos notables del artículo ha sido mostrar a estas cuatro mujeres como referentes ante la sociedad en general y ante las nuevas generaciones de alumnas de Secundaria y Bachillerato y de mujeres matemáticas en particular, poniéndolas como ejemplo de que con trabajo, interés, tesón y esfuerzo también las mujeres pueden conseguir premios y distinciones importantes en cualquier disciplina, por difícil y complicada que parezca esta posibilidad, en razón del escasísimo porcentaje de mujeres existente en las relaciones de varones y mujeres que han obtenido hasta el momento estos galardones.

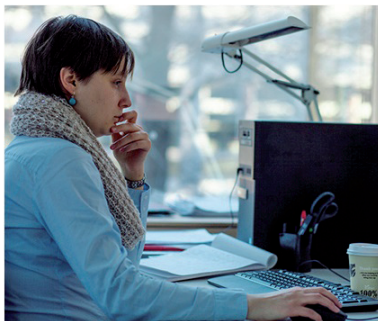
En el artículo, y como primera reflexión, los autores desean poner de manifiesto que hasta el momento, el número de mujeres galardonadas en los distintos Premios en Matemáticas es escasísimo y muy desalentador. A esa conclusión es fácil llegar sin más que tener en cuenta la relación de varones y mujeres galardonados en los diferentes Premios en Matemáticas que forman parte de una clasificación de los mismos en tres grupos, elaborada por uno de ellos según el criterio de que el grado de trascendencia, relevancia e importancia de los mismos en la consideración y reconocimiento de la sociedad sea muy elevado, menos o nada elevado, respectivamente (véase (Núñez, 2018) para mayor información).

Sin embargo, y como segunda reflexión, las cuatro biografías de mujeres matemáticas mostradas hacen ver que a partir de los últimos seis años ese número de mujeres galardonadas se ha ido haciendo cada vez mayor, de forma que la presencia de la mujer como ganadora de Premios en Matemáticas ha ido aumentando sensiblemente, no solo en la cantidad de mujeres galardonadas, sino también en la calidad de los Premios que van consiguiendo: Medalla Fields, Premios Poincaré, Erdős, etc.

De hecho, algunas de estas cuatro mujeres (junto a otras, como por ejemplo la ucraniana Maryna Viazovska, por sus trabajos sobre empaquetamientos de esferas o la francesa Sophie Morel, por sus investigaciones en Teoría de Números) eran inicialmente serias candidatas (Villatoro, 2017) a conseguir una de las Medallas Fields que se iban a conceder en la edición de 2018, lo cual finalmente no ha sucedido al ser galardonados con estas medallas nuevamente solo matemáticos varones: los catedráticos Peter Scholze, de la Universidad de Bonn (Alemania), Alessio Figalli, de la Escuela Politécnica Federal de Zúrich (Suiza), Akshay Venkatesh, de la Universidad de Stanford (EE UU) y Caucher Birkar de la Universidad de Cambridge (Reino Unido). Todos ellos tienen entre 30 y 40 años, han desarrollado carreras meteóricas y están especializados en ramas matemáticas tan abstractas como la geometría aritmética y algebraica, la teoría de números y las derivadas parciales.

Por ello y en todo caso, los autores mostramos nuestra esperanza y deseo de que continúe esta tendencia al alza de las mujeres y que en un futuro no muy lejano (aunque con toda seguridad creemos que tampoco va a ser inmediato) la proporción de mujeres ganadoras de Premios importantes en Matemáticas frente a la de varones se acerque lo más posible a la situación ideal de un equilibrio entre ambos géneros, si no de un 50% para cada uno de ellos, sí al menos rondando el 35 o 40% para las mujeres. Ojalá que suceda así.

Maryna Viazovska (Ucrania, 33 años)  
Empaquetamiento de esferas (8, 24)



Sophie Morel (Francia, 37 años)  
Teoría de números y programa de Langlands



Figuras 16 y 17. Marynia Viazovska (izqda.) y Sophie Morel (dcha.). Fuente: Villatoro, 2017.

Figura 18. Maryam Mirzakhani en los momentos posteriores a la entrega de la Medalla Fields en el ICM de Seoul-2014. Imagen: The Nation Journal of Thailand.



Y para terminar, en homenaje a Maryam Mirzakhani y de acuerdo con la pretensión de los autores de honrar su memoria, nada mejor que finalizar esta aportación con una frase de ella que resume muy bien su carácter y su forma de ser:

La belleza de las Matemáticas solo se evidencia a sus discípulos más pacientes.

## REFERENCIAS

- Valdés, J. (2018). Las mujeres y los Premios de Matemáticas, *Actas de la Quinta Jornada Internacional: Matemáticas Everywhere*, Castro (Cantabria), 18, 19 y 20 de junio 2018, 77-112.
- Núñez Valdés, J, Antón Díaz, A, Manzorro Castrillón, L. (2016). ¿Consiguen las mujeres premios en Matemáticas?, *Actas (CD) del VI Congreso Universitario Nacional "Investigación y Género"*. Universidad de Sevilla, 30 de junio y 1 de julio de 2016, 500-510.
- Siobhan, R. (2017). *In Mathematics, You Cannot Be Lied To*. Recuperado 15 de enero de 2018 de <https://www.quantamagazine.org/sylvia-serfaty-on-mathematical-truth-and-frustration-20170221/>

- Villatoro, F. R. (2017). *Predicciones para las medallas Fields en el ICM 2018 de Río de Janeiro* <https://francis.naukas.com/2017/11/09/predicciones-para-las-medallas-fields-en-el-icm-2018-de-rio-de-janeiro/>. Recuperado el 25 de agosto de 2018.
- [web1] [www.wisdom.weizmann.ac.il/~dinuri/](http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~dinuri/) (sobre Irit Dinur). Recuperado el 25 de agosto de 2018.
- [web2] Turing Centennial Post 1: Irit Dinur. <https://lucatrevisan.wordpress.com/.../turing-centennial-post-1-irit...> (sobre Irit Dinur). Recuperado el 25 de agosto de 2018.
- [web3] [https://www.google.es/search?q=translator&rlz=1C1AOHY\\_esES711ES711&source=lnms&tbm=nws&sa=X&ved=0ahUKEwjAzvGLkL7YAhWIVhQKHYYiCMwQ\\_AUICigB&biw=1280&bih=685](https://www.google.es/search?q=translator&rlz=1C1AOHY_esES711ES711&source=lnms&tbm=nws&sa=X&ved=0ahUKEwjAzvGLkL7YAhWIVhQKHYYiCMwQ_AUICigB&biw=1280&bih=685) (sobre una entrevista a Claire Voisin). Recuperado el 25 de agosto de 2018.
- [web4] <https://webusers.imj-prg.fr/~claire.voisin/> (sobre Claire Voisin). Recuperado el 25 de agosto de 2018.
- [web5] <http://www.europeanwomeninmaths.org/women-in-math/portrait/claire-voisin> (sobre Claire Voisin). Recuperado el 25 de agosto de 2018.
- [web6] Blogs Madri+d. Matemáticas y sus fronteras. Recuperado el 25 de agosto de 2018 de <http://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2012/08/08/134526> (sobre Nalini Anantharaman y Sylvia Serfaty)
- [web7] Recuperado el 25 de agosto de 2018 de <https://www.sgen-cfdt.fr/actu/sylvia-serfaty-nalini-anantharaman/> (sobre Nalini Anantharaman y Sylvia Serfaty)
- [web8] The International Association of Mathematical Physics. Premio Henry Poincaré. Recuperado el 25 de agosto de 2018 de [http://www.iamp.org/page.php?page=page\\_prize\\_poincare](http://www.iamp.org/page.php?page=page_prize_poincare) (sobre el Premio Hery Poincaré)

## RINCÓN “SAPERE AUDE”... ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Huelva

sixto@uhu.es

### 1. MATEMÁTICAS ENTRE 400 Y 1600 D. C EN LA INDIA

#### 1.1. Algunos personajes destacados

Continuamos en esta segunda parte con un periodo importante de las Matemáticas en la India, entre 400 d. C. y 1600 d. C., considerándose como el periodo clásico en la India. Hay que destacar, entre otras, las obras: *Āryabhatīya*, *Pancasiddhāntikā*, *Āryabhatīya Bhasya*, *Mahā*, *Bhāskariya*, *Brāhmasput.asiddhānta*, *Pātīganita*, *Ganitasārasāngraha*, *Ganitalaka*, *Līlāvātī*, *Bijaganita*, y algunos de los autores:

- a) **Aryabhata I** (nacido en 476). Poco se sabe de la vida de Aryabhata, que se llama Aryabhata I para distinguirlo de otro matemático del mismo nombre que vivió cuatro siglos más tarde. Aryabhata desempeñó un papel en el desarrollo del actual sistema de números y contribuyó a la teoría de números en un momento en que gran parte de Europa estaba envuelta en la ignorancia. Nació en la India y tuvo una conexión con la ciudad Kusumapura, la capital de los Guptas durante los siglos IV y V; este lugar se cree que es la ciudad de su nacimiento. Ciertamente, su *Āryabhatīya* fue escrito en Kusumapura, que más tarde se convirtió en un centro de aprendizaje matemático.
- b) **Bhāskara I**, era un matemático indio del siglo VII, que probablemente vivió entre c.600- c.680. Probablemente fue el primero en usar un círculo para el cero en el sistema decimal hindú-árabe, y al comentar sobre el trabajo de Aryabhata, evaluó una aproximación racional extraordinaria de la función seno. Hay muy poca información sobre la vida de Bhaskara. Se dice que nació cerca de Saurashtra en



Figura 1. Aryabhata I.  
<https://www.biografias.es/famosos/aryabhata.html>

Gujarat y murió en Ashmaka. Fue educado por su padre en astronomía. Se le considera un seguidor de Aryabhata I y uno de los eruditos más reconocidos de la escuela astronómica de Aryabhata. Escribió dos tratados, el Mahabhaskariya y el Laghubhaskariya. También escribió comentarios sobre el trabajo de Aryabhata I titulado Aryabhatiyabhasya. El Mahabhaskariya consta de ocho capítulos que tratan sobre astronomía matemática. El libro trata temas como: las longitudes de los planetas; asociación de los planetas entre sí y también con las estrellas brillantes; la luna creciente; eclipses solares y lunares; y levantamiento y configuración de los planetas. También sugirió una fórmula que tenía un valor asombrosamente preciso del seno



Figura 2. Bhāskara I.  
<http://taapli.com/bhaskara-i-a-indian-mathematician/>

$$\text{sen}(x) = \frac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)}$$

que evaluada numéricamente en el ordenador obtenemos para el intervalo cerrado  $[0, \pi/2]$  con paso de  $\pi/20$

$x = 0$	fórmula = 0.00000	sen (x)= 0.00000	error = 0.00000
$x = \pi/20$	fórmula = 0.15800	sen (x) = 0.15643	error = 0.00157
$x = \pi/10$	fórmula = 0.31034	sen (x) = 0.30903	error = 0.00131
$x = 3\pi/20$	fórmula = 0.45434	sen (x) = 0.45399	error = 0.00035
$x = \pi/5$	fórmula = 0.58716	sen (x) = 0.58778	error = -0.00062
$x = \pi/4$	fórmula = 0.70588	sen (x) = 0.70710	error = -0.00122
$x = \pi/10$	fórmula = 0.80769	sen (x) = 0.80903	error = -0.00134
$x = 7\pi/20$	fórmula = 0.88998	sen (x) = 0.89103	error = -0.00105
$x = 2\pi/5$	fórmula = 0.95050	sen (x) = 0.95105	error = -0.00055
$x = 9\pi/20$	fórmula = 0.98753	sen (x)= 0.98769	error = -0.00016
$x = \pi/2$	fórmula = 1.00000	sen(x) = 1.00000	error = 0.00000

- c) **Varahamihira** (505-587). Nuestro conocimiento de Varahamihira es muy limitado. Según una de sus obras, fue educado en Kapitthaka. Sin embargo, lejos de resolver la cuestión, esto solo da lugar a discusiones sobre posibles interpretaciones de dónde estaba este lugar. Dhavale discute este problema. No sabemos si nació en Kapitthaka, donde sea que esté, aunque hemos dado esto como la suposición más probable. Sin embargo, sabemos que trabajó en Ujjain, que había sido un centro importante para las matemáticas desde alrededor del año 400 d.C. La escuela de matemáticas en Ujjain aumentó en importancia debido a que Varahamihira trabajaba allí y continuó durante mucho tiempo siendo uno de los dos

principales centros matemáticos en la India, en particular teniendo a Brahmagupta como su próxima figura principal.

La obra más famosa de Varahamihira es el *Pancasiddhantika* (Los cinco cánones astronómicos) de 575 d. C. Este trabajo es importante en sí mismo y también en darnos información sobre textos indios más antiguos que ahora están perdidos. El trabajo es un tratado sobre astronomía matemática y resume cinco tratados astronómicos anteriores, a saber, los siddhantas Surya, Romaka, Paulisa, Vasishta y Paitamaha.

Shukla afirma:

"...El *Pancasiddhantika* de Varahamihira es una de las fuentes más importantes para la historia de la astronomía hindú antes de la época de Aryabhata I..."

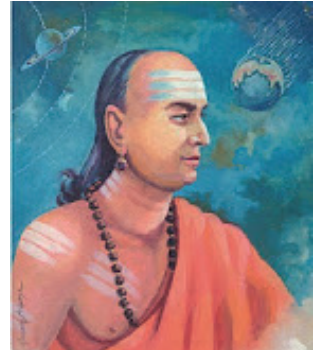


Figura3. Varahamihira.  
<http://meteobasica.blogspot.com/2012/05/biografia-de-varahamihira-505-587-dc.html>

Varahamihira hizo algunos descubrimientos matemáticos importantes. Entre estos se encuentran ciertas fórmulas trigonométricas que traducidas a nuestra notación actual corresponden a

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \cos (\pi / 2 - x), \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x &= 1, \text{ y} \\ (1 - \cos 2x) / 2 &= \operatorname{sen}^2 x. \end{aligned}$$

Otra contribución importante a la trigonometría fueron sus tablas sinusoidales donde mejoró las de Aryabhata I dando valores más precisos. Debe enfatizarse que la precisión era muy importante para estos matemáticos indios, ya que estaban calculando tablas sinusoidales para aplicaciones a la astronomía y la astrología. Esto motivó gran parte de la precisión mejorada que lograron al desarrollar nuevos métodos de interpolación.

**d) Brahmagupta** (598-665), cuyo padre era Jisnugupta, escribió importantes trabajos sobre matemáticas y astronomía. En particular, escribió *Brāhmasput. asiddhānta* en 628. El trabajo fue escrito en 25 capítulos y Brahmagupta nos dice en el texto que lo escribió en Bhillamala, que hoy es la ciudad de Bhinmal. Esta fue la capital de las tierras gobernadas por la dinastía Gurjara.

Brahmagupta se convirtió en el jefe del observatorio astronómico en Ujjain, que era el principal centro matemático de la antigua India en este momento. Matemáticos sobresalientes como Varahamihira habían trabajado allí y construyeron una fuerte escuela de astronomía matemática.

La comprensión de Brahmagupta de los sistemas numéricos representó un progreso significativo más allá de sus contemporáneos. El concepto de cero, ajeno a los matemáticos indios, Brahmagupta lo definió como la diferencia de un número consigo mismo. Luego derivó sus propiedades básicas; sabía que el cero era una

identidad aditiva, por ejemplo, pero tenía dificultades para definir la división por cero, sin darse cuenta de que esta operación es imposible. Los números negativos se introducen al restar una (cantidad positiva) de cero, y se describen como “deudas”. Brahmagupta, después demuestra la aritmética de los números positivos y negativos, y muestra, por ejemplo, que un negativo multiplicado por un positivo es un negativo.

También analiza la multiplicación extendida de números grandes, utilizando un sistema numérico de valor de posición bastante similar al método moderno. De hecho, el sistema numérico actual se deriva, con algunas modificaciones, de los matemáticos indios. Brahmagupta presenta un procedimiento para calcular raíces cuadradas que es en realidad equivalente al método iterativo de Newton-Raphson. Para resolver ciertas ecuaciones cuadráticas, Brahmagupta introdujo una notación algebraica simbólica y probablemente usó el método de fracciones continuas. Algunos otros temas del *Brahmasphutasiddhanta* incluyen reglas para sumar series –como la suma de números enteros, cuadrados y cubos consecutivos– y fórmulas para áreas de cuadriláteros.

Son interesantes las reglas aritméticas siguientes en términos de fortunas (números positivos) y deudas (números negativos):

1. Una deuda menos cero es una deuda.
2. Una fortuna menos cero es una fortuna.
3. Cero menos cero es un cero.
4. Una deuda restada de cero es una fortuna.
5. Una fortuna restada de cero es una deuda.
6. El producto de cero multiplicado por una deuda o fortuna es cero.
7. El producto de cero multiplicado por cero es cero.
8. El producto o cociente de dos fortunas es una fortuna.
9. El producto o cociente de dos deudas es una fortuna.
10. El producto o cociente de una deuda y una fortuna es una deuda.
11. El producto o cociente de una fortuna y una deuda es una deuda.
12. Brahmagupta luego trató de extender la aritmética para incluir la división por cero:
13. Los números positivos o negativos cuando se divide por cero es una fracción del cero como denominador.
14. El cero dividido por números negativos o positivos es cero o se expresa como una fracción con cero como numerador y la cantidad finita como denominador.
15. Cero dividido por cero es cero.



Figura 4. Brahmagupta.  
<https://es.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta>

Realmente Brahmagupta dice muy poco cuando sugiere que  $n$  dividido por cero es  $n/0$ . Ciertamente se equivoca cuando afirma que cero dividido por cero es cero. Sin embargo, es un intento brillante de extender la aritmética a números negativos y cero.

También son dignos de mención: Mahāvīracarya (nacido alrededor de 850), Āryabhata II (950-1100), Śrīdhara (nacido en 991), Bhāskarācārya (Bhāskara II, nacido en 1114).

## 1.2. Sistematización en el estudio de algunas ecuaciones

Según el método hindú, todo, incluidas las matemáticas, se expresa utilizando la poesía como elemento de “divulgación”. Los números, con frecuencia, fueron reemplazados por palabras de la mitología india.

El primer tratamiento sistemático de la ecuación de primer grado

$$ax + c = by$$

(*Kuṭṭaka*) se encuentra en el tratado *Āryabhatīya* del astrónomo indio Āryabhaṭa aproximadamente 510 después d.C. De los 33 versos muy concisos de la parte matemática (*Gaṇīṭa*) dos se refieren a esta cuestión cuyo tratado se perdió, posteriormente la solución fue esbozada posteriormente por Brahmagupta, y Bhāskara dará los detalles claramente. Āryabhat sabía cómo extraer raíces cuadradas que las utiliza en sus estudios de progresiones aritméticas y determina el número de esferas en un empilamiento tetraédrico, también da reglas para calcular valores sinusoidales.

Varāhamihira, astrónomo de la escuela de Ujjain (en el centro de la India) escribe *Panca Siddhāntika*, que contiene un resumen de la trigonometría hindú. Sus tablas, de senos, podría provenir de Ptolemeo. Mucho antes de Copérnico, sabía que la tierra gira alrededor del sol. El tratado de astronomía (*Brhatsamhitā*) de Varāhamihira incluye una descripción científica de las elipses, incluso se ve obligado a justificar los mitos de la ortodoxia de los Brahmanes. Sucede igual para el *Brahma-Siddhānta* de Brahmagupta.

El método cíclico (*Cakravala*) para resolver la ecuación

$$x^2 - Py^2 = \pm 1$$

se remonta a los trabajos de matemáticos y astrónomos de la escuela india entre los siglos VI y XII, era conocida por Jayadeva en el siglo XI, y Brahmagupta sabía que había un número infinito de soluciones. La estructura multiplicativa del conjunto de soluciones le era familiar, y a partir de una solución sabía construir una infinidad.

La identidad de Brahmagupta es

$$(x^2 - Py^2)(z^2 - Pt^2) = (xz \pm Pyt)^2 - P(xt \pm yz)^2$$

y su método para obtener dos soluciones es *bhavana* en sanscrito.

**Ejemplo:** El método cíclico conduce siempre a una solución. Un ejemplo espectacular (obtenido de Weil, A. *Number Theory. An approach through history*. From Hammurapi to Legendre. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, Mass., 1984) lo podemos encontrar en la ecuación

$$x^2 - 61y^2 = 1$$

Brahmagupta conocía también:

a) La parametrización de la ecuación de Pitágoras por

$$x = 2mn, y = m^2 - n^2, z = m^2 + n^2$$

b) Sabía resolver las ecuaciones de la forma

$$axy = bx + cy + d$$

c) El problema que consiste en encontrar  $x$  e  $y$  tales que  $ax+1$  y  $bx+1$  sean sendos cuadrados.

Da la solución,

$$x = \frac{8(a+b)}{(a-b)^2}, ax+1 = \left(\frac{3a+b}{a-b}\right)^2, bx+1 = \left(\frac{a+3b}{a-b}\right)^2$$

Igualmente, muestra cómo elegir  $x$  e  $y$  para que los números  $x+y$ ,  $x-y$ ,  $xy-1$  sean cuadrados.

Finalizo esta entrega, indicando que como en otras civilizaciones matemáticas antiguas, la determinación del número  $\pi$  jugó un papel importante.

En la fórmula

$$s = d \left( 1 - \frac{28}{(8)x(29)} \left( 1 + \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{1}{8} \right) \right) \right)$$

Baudhāyana, para el lado  $s$  de un cuadrado dónde el área es la de un disco de diámetro  $d$ , da para  $\pi$  el valor aproximado de 3,088.

## SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

### 1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 101)

Para Platón los entes geométricos ideales eran la recta y la circunferencia: toda la geometría habría que limitarla a las construcciones con regla y compás. Esta era la forma correcta de resolver los problemas geométricos, y cualquier otra forma era vulgar y degradante, y no merecía ni ser contemplada.

Fuertemente influenciado por Platón los griegos se dispusieron a construir la geometría con regla y compás, y la verdad es que no les fue tan mal porque hicieron una labor encomiable. Pero en su camino se tropezaron con tres problemas que fueron incapaces de resolver y que fueron tomando importancia con el paso del tiempo hasta ser llamados: "*Los Tres Problemas Clásicos de la antigüedad*". Estos problemas son:

- a) **La duplicación del cubo:** construir un cubo cuyo volumen sea doble que el de un cubo de lado dado.
- b) **La trisección del ángulo:** dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales.
- c) **La cuadratura del círculo:** dado un círculo, encontrar el lado de un cuadrado cuya área sea la misma que la del círculo inicial.



Figura 5. Tres problemas clásicos. <http://masquemates.blogspot.com/2007/11/los-tres-problemas-clasicos.html>

Los tres problemas tienen en común que son en apariencia sencillos, tienen un enunciado que anima a intentarlos, pero ninguno de los tres tiene solución utilizando solo la regla y el compás, como después siglos más tarde se demostraría.

La necesidad de estudiar los elementos constitutivos de las referencias espaciales ha dado lugar, en las últimas décadas, en cuánto a la enseñanza de la geometría se refiere, a trabajos didácticos inspirados en diferentes teorías, pero a menudo de una preocupación común de análisis.

Así, trabajos recientes han estudiado la introducción de una dimensión cognitiva (Houdement & Kuzniak, Parzys, Jore ...), surgen preguntas tales como la articulación entre espacios de trabajo, en la constitución de la geometría, la entrada perceptiva o la cuestión de la visualización; entrada experimental, ...; finalmente, la cuestión de la inferencia y el lenguaje, luego de la prueba (ver Houdement y Kuzniak, en este mismo trabajo). Los trabajos de Perrin et al. (Offer, Perrin & Verbaere, 2006, Keskes, Perrin & Delplace, 2007, Perrin & Godin, 2009) se centran en el estudio del uso de instrumentos y el paso del razonamiento de la geometría instrumentada, mientras que no prohíben hacer proposiciones de situaciones para favorecer esta transición. En 1992, Berthelot y Salin definieron y experimentaron situaciones que organizaban la transición de la experimentación a la geometría, en un proceso que llamaron un enfoque de modelado porque la transición de la experimentación a la teorización fue el principio. De acuerdo con la naturaleza del problema de geometría propuesto, se refirieron a tres problemas (Berthelot y Salin, 1992):

- **Un problema práctico** en el que los objetos sobre los que se trabaja son objetos físicos (en particular dibujos): la validación es hecha mientras permanece en el espacio sensible.
- **Un problema geométrico** en el que los objetos ya no son objetos físicos: la validación se realiza mediante un razonamiento que se basa únicamente en el conocimiento geométrico reconocido.

- **Un problema de modelización** en el que trabajamos con objetos físicos: la validación se realiza en el espacio sensible, como en el problema práctico, pero el enfoque de la resolución es totalmente diferente ya que se basa en propiedades geométricas.

Estos tres problemas están asociados con situaciones organizadas en espacios de diferente tamaño (dimensiones espaciales): **microespacio**, **mesoespacio**, **macroespacio** (véase Berthelot y Salin, 1992, Brousseau, 2000). Inspirados por estos enfoques, Presiat y Combiér (2003) establecieron situaciones para garantizar la transición de la experimentación en el meso-espacio con la geometría escolar. (Bloch I., Conne F. et al. (eds.), *L'enseignement de la géométrie, de l'école au début du collège: situations et connaissances. Actes de la XIVème Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques*, pp. 1 – 24., 2008)

### Propuesta 1: dos joyitas geométricas

**JOYITA: a)** Sea  $M$  un punto del lado  $BC$  de un triángulo  $ABC$ . La paralela por  $M$  a  $AB$  corta al lado  $AC$  en el punto  $N$  y la paralela por  $M$  a  $AC$  corta al lado  $AB$  en el punto  $O$ . La razón entre las áreas de los triángulos  $OBM$  y  $NMC$  es  $k$ . Determine la razón entre las áreas de los triángulos  $AON$  y  $ABC$ .

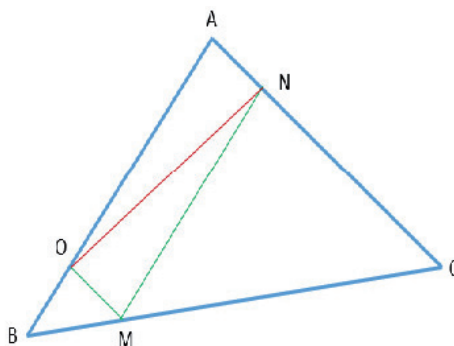
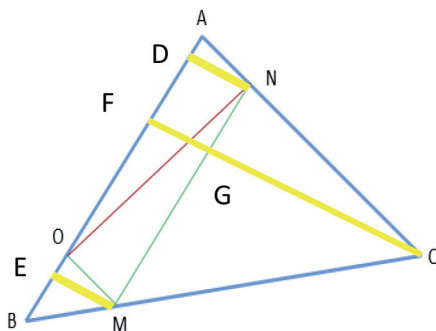


Figura 6. Triángulo cualquiera.

### SOLUCIÓN

#### Paso 1

Consideremos el triángulo cualquiera, de la figura adjunta



Tracemos la perpendicular por  $N$ , por  $M$  y por  $C$  al lado  $BA$ , cortando en  $D$ ,  $E$ , y  $F$  respectivamente

Los triángulos  $OBM$  y  $NMC$  son semejantes, de razón  $k$ . El cuadrilátero  $AOMN$  es un paralelogramo, y  $MN=OA$ .

Si a  $BO$  lo designamos por  $t$ , se tiene que

$$MN=OA=k.t.$$

Como

$$BA=BO+OA \Rightarrow BA=t+kt=(1+k)t$$

$$\text{El } \text{Área}(OBM)=W=(OB \cdot EM)/2$$

### Paso 2

Por otro lado,  $CG = k \cdot EM \Rightarrow CG=k \cdot h$  siendo  $h=EM$  la altura del triángulo  $OBM$ .

$$CF=CG+GF=CG+EM \quad \square \quad CF=(1+k)h.$$

Y el área del triángulo  $ABC$  es:

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABC) &= (1+k^2) \cdot W \\ DN=GF=EM &= h \end{aligned}$$

### Paso 3

$$\begin{aligned} \text{Área}(AON) &= (AO/2) \cdot GF = (k \cdot t \cdot h) / 2 = k \cdot W \\ \text{Área}(OBM)/\text{Área}(ABC) &= k \cdot W / (1+k)^2 \cdot W = k / (1+k)^2 \end{aligned}$$

**JOYITA: b)** Dos circunferencias secantes  $C_1$  y  $C_2$  de radios  $R_1$  y  $R_2$  se cortan en los puntos  $A$  y  $B$ .

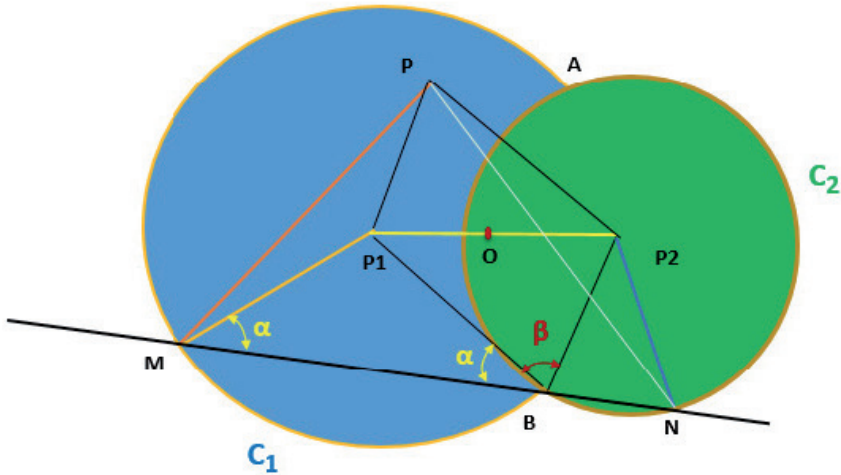
Por  $B$  se traza una recta variable que corta de nuevo a  $C_1$  y  $C_2$  en dos puntos que llamaremos  $M$  y  $N$  respectivamente. Comprobar que existe un punto  $P$ , que depende sólo de  $C_1$  y  $C_2$ , tal que la mediatriz del segmento  $MN$  pasa por  $P$ .

NOTA: Problema Olimpiada Nacional. Solución de L. Emilio García (UPV).

## SOLUCIÓN

### Paso 1

La figura adjunta muestra las dos circunferencias secantes  $C_1$  y  $C_2$ .



Consideremos el punto  $O$ , como punto medio del segmento  $P_1P_2$ . Todas las matrices de los segmentos  $MN$  pasan por el punto simétrico de  $B$  respecto de  $O$ .

Consideremos los ángulos

$$\alpha = \angle MBP_1 = \angle P_1MB, \quad \beta = \angle P_1BP_2$$

sigue pues que  $\angle P_2BN = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ .

Como el triángulo  $P_2BN$  es isósceles, se tiene

$$\begin{aligned} \angle BP_2N &= 180^\circ - 2 \angle P_2BN = -180^\circ + 2(\alpha + \beta), \text{ y así} \\ \angle PP_2N &= 180^\circ - \beta + \angle BP_2N = 180^\circ - \beta - 180^\circ + 2(\alpha + \beta) = 2\alpha + \beta \end{aligned}$$

De modo análogo, por ser el triángulo  $MP_1B$  isósceles, se tiene:

$$\angle MP_1B = 180^\circ - 2\alpha$$

y

$$\angle MP_1B = 360^\circ - (\angle MP_1B + 180^\circ - \beta) = 360^\circ - 180^\circ + 2\alpha - 180^\circ + \beta = 2\alpha + \beta$$

Resulta que para cualquier posición de la recta variable los triángulos  $PP_1M$  y  $PP_2N$  son iguales y por tanto  $PM=PN$  y  $P$  está en la mediatriz de  $MN$ .

Como  $P$  no depende de la recta variable queda probada la propiedad del enunciado.

## SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

### 1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la propuesta de los ejercicios del número anterior 101)

La naturaleza formal y cognitiva que puede ofrecer la teoría de números para la Educación Matemática (EM), su relación con la aritmética y el álgebra, su accesibilidad, su utilidad y otras cuestiones hay que entenderlas como una interrelación bajo la óptica de la promoción y el diálogo, con sentido de crítica constructiva, de las investigaciones que ofrece la comunidad internacional de Educación Matemática (EM), presentando su relevancia e importancia en este campo en alumnos de secundaria y la formación de maestros, sobre todo.

La lectura de la obra de Rina Zakis y Stephen R. Campbell, *Number Theory in Mathematics Education: Perspectives and Prospects (Studies in Mathematical Thinking and Learning)* que, entre otros, incluye los temas:

- a) Comprensión de conceptos particulares relacionados con la estructura numérica y la teoría de números.
- b) La elaboración de la relevancia histórica y psicológica de la teoría de números en el desarrollo de conceptos.
- c) El logro de una transición y extensión sin problemas desde el reconocimiento de patrones hasta los principios formativos.
- d) La consecución del entendimiento de la estética de la estructura numérica.
- e) La investigación de conexiones entre técnica y teoría.
- f) La utilización de ordenadores y calculadoras como herramientas pedagógicas.
- g) ...Y el papel que podrían desempeñar los conceptos de la teoría de números en el desarrollo del conocimiento matemático y el razonamiento en estudiantes y maestros.

Nos debe llevar a la consideración de destacar que esta temática relacionada con la teoría de números debería utilizarse como un trampolín desde la aritmética hacia la generalización y el formalismo algebraico, y como un medio para proporcionar significados intuitivos de números, variables, funciones y pruebas.

### Propuesta 2: dos joyitas numéricas

**JOYITA:** a) Hallar todos los enteros positivos  $p$  y  $q$  tales que

$$p! + 1 = (q! - 1)^2$$

## SOLUCIÓN

### Paso 1

Consideremos que  $p$  y  $q$  son enteros positivos, de la expresión

$$p! + 1 = (q! - 1)^2,$$

sigue que  $q \geq 3$ .

Por lo tanto,

$$p! + 1 = (q!)^2 - 2q! + 1, \text{ o sea } p! = (q!)^2 - 2q! \\ p! = q! (q! - 2).$$

Al ser obviamente  $p > q$ , si se divide por  $q!$  ambos miembros se tiene que

$$\frac{p!}{q!} = q! - 2, \\ \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-(p-q-1)q(q-1)\dots 1)}{q(q-1)(q-2)\dots 1} = q! - 2 \\ \frac{p(p-1)(p-2)\dots(q+1)q!}{q!} = q! - 2 \\ p(p-1)(p-2)\dots(q+1) = q! - 2$$

tenemos que  $p(p-1)(p-2)\dots(q+1) = q! - 2$  y al ser  $q!$  divisible por 3 ( $q \geq 3$ ), tenemos que  $q! - 2$  no es divisible por 3, por lo que el término de la izquierda,  $p(p-1)\dots(q+1)$ , debe tener a lo sumo dos factores.

### Paso 2

#### 2.1. Primer Caso

- a) Sea  $p = q + 1$   $\vee$   $q + 1 = q! - 2$   $\vee$   $q = q! - 3$ . Como  $q$  divide a  $q! - 3$  y divide a  $q!$  podemos inferir que  $q$  divide a 3  $\vee$   $q = 3$  y  $p = 4$ .
- b) Podemos comprobar que para estos dos valores se cumple que

$$(4!+1) = (3! - 1)^2. \text{ En efecto: } (24+1) = (6-1)^2, 25 = 25.$$

#### 2.2. Segundo Caso

- a) Sea  $p = q + 2 \Rightarrow (q + 2)(q + 1) = q! - 2 \Rightarrow q^2 + 3q + 2 = q! - 2 \Rightarrow q^2 + 3q + 4 = q!$

Por lo tanto:  $3q = q! - q^2 - 4$  con lo que  $q$  divide a  $q! - q^2 - 4 \Rightarrow q$  divide a 4 y, por tanto,  $q = 4$ .

- b) Concluimos que  $q = 4$  no es solución de  $q^2 + 3q + 4 = 4!$  pues  $16 + 12 + 4 \neq 24$ . La única solución es, por ello

$$q=3, p=4$$

**JOYITA: b)** Los números enteros desde 1 hasta 9 se distribuyen en las casillas de un cuadrado  $3 \times 3$ . A continuación sumamos seis números de tres cifras, tres que se leen en filas de izquierda a derecha y otros tres que se leen en columnas de arriba abajo.

¿Podremos encontrar alguna distribución para la que se obtenga como valor de la suma 2019?

## SOLUCIÓN

### Paso 1

Sea la distribución siguiente en el cuadrado

p	q	r
s	t	u
v	x	z

Atendiendo a las condiciones del ejercicio, se tiene que la suma es:

$$S = pqr + stu + vxz + psv + qtx + ruz$$

$$S = 100(p + s + v + p + q + r) + 10(q + t + x + s + t + u) + (v + u + z + y + x + z) =$$

$$S = 100(2p + s + v + q + r) + 10(q + 2t + x + s + u) + (r + u + 2z + y + x)$$

$$S = 200p + 100s + 100v + 100q + 100r + 10q + 20t + 10x + 10s + 10u + v + u + 2z + y + x$$

$$S = 200p + 110s + 101v + 110q + 101r + 20t + 11x + 11u + 2z$$

### Paso 2

Para las distintas distribuciones que podamos realizar, interviniendo los números del 1 al 9, en módulo 9 se tiene:

$$200:9 = 22.9 + 2$$

$$110:9 = 12.9 + 2$$

$$101:9 = 11.9 + 2$$

$$20:9 = 2.9 + 2$$

$$11:9 = 1.9 + 2$$

Por ello,

$$S = 2(p + s + v + q + t + x + r + u + z) = 2 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 2.45 = 90$$

que en módulo 9 es  $S=0$ .

Por lo tanto, como 2019 no es múltiplo de 9, no habrá ninguna distribución para la que la suma indicada tome el valor 2019 podremos afirmar que la suma S no puede valer nunca 2019.

## SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS

Siguiendo el mismo esquema que en artículo anteriores, en esta ocasión, presentará varios ejercicios relativos a la teoría de números y la geometría del triángulo.

### Propuesta 1: dos joyitas geométricas

El círculo en el que aparecieron los estudios matemáticos a principios del siglo XIX se rompió por todos lados. Se nos presentan viejos problemas de forma renovada, surgen nuevos problemas, cuyo estudio ocupa legiones de trabajadores. El número de quienes cultivan geometría pura se ha vuelto prodigiosamente pequeño. Este es un peligro contra el cual es importante protegerse. No olvidemos que, si el Análisis ha adquirido los medios de investigación de los que carecía en el pasado, se los debe en gran medida a las concepciones introducidas por los Agrimensores. No es necesario que la Geometría permanezca de alguna manera enterrada en su triunfo. Fue en su escuela donde aprendimos, que nuestros sucesores tendrían que aprender, nunca confiar ciegamente en métodos demasiado generales, considerar las preguntas por sí mismos y encontrar, en las condiciones particulares de cada problema, un camino directo hacia una solución fácil, los medios para aplicar de manera apropiada los procesos generales que toda la ciencia debe unir. Como dice Chasles en el Resumen histórico: "...Las doctrinas de la geometría pura a menudo ofrecen, y en una gran cantidad de preguntas, esta forma simple y natural que, al penetrar en el origen de las verdades, expone la cadena misteriosa que las une y las hace conocer individualmente de la manera más luminosa y completa..."

¡Cultivemos la geometría, que tiene sus propias ventajas, ...!

- a) *¿Existe algún triángulo tal que las medidas de sus lados son tres números consecutivos y el ángulo mayor es el doble que el menor? En caso afirmativo, calcular las medidas.*
- b) *Sea M un punto interior del segmento AB. Se construyen cuadrados AMCD y BEHM en el mismo lado de AB. Si N es el segundo punto de intersección de las circunferencias circunscritas a dichos cuadrados probar que:*

1. Los puntos  $B, N$  y  $C$  están alineados.
2. El punto  $H$  es el ortocentro del triángulo  $ABC$ .

## Propuesta 2: dos joyitas numéricas

Prácticamente desde nuestra más tierna infancia, las Matemáticas nos circundan formando parte de nuestras vidas. Modelizamos con algoritmos matemáticos, casi todo.

Empezamos con los números naturales que con "cierta simpleza", los utilizamos a diario para contar objetos, realizar diferentes operaciones elementales cuando vamos al mercado, al cine, al teatro, al kiosco, ...en definitiva cuándo compramos alguna cosa, manejamos nuestra economía, así como todo aquello que necesitamos para vivir. Posteriormente aparece el uso de los números negativo, fraccionarios, reales, y complejos.

Llega a ser un uso casi automático, con aplicaciones en formas complejas variando acorde a distintas disciplinas o tecnologías.

Presentaré en esta ocasión, y ulteriormente en siguientes números, algunos ejercicios que aparecen en la Olimpiada Matemática Nacional en nuestro país.

El por qué presentar en la sección SAPERE AUDE problemas de olimpiadas matemáticas hay que encontrarlo en el convencimiento de que la participación de muchos jóvenes estudiantes en todo el mundo, han alcanzado una importante resonancia internacional desde hace décadas. Se trata de una propuesta intelectual que permite al alumno/a enfrentarse a una situación problemática simple o no, muchas veces difícil, resoluble con sentido común y un poco de la matemática escolar y/o elemental. No se trata de un ejercicio más o menos evidente como los que abundan al final de un capítulo en un libro de texto, tampoco es una situación abstracta de resultados teóricos prefijados, ni problemas con enunciados con trampas para confundir al estudiante con talento.

La realización de estas actividades, como nuestra Olimpiada Thales, permite que los responsables académicos de muchos países mantengan su currícula escolar convenientemente actualizado para satisfacer a las exigencias del mundo moderno.

Soy consciente de la marcada diferencia entre la matemática escolar y la olímpica. Esta última apunta al ingenio, la creatividad, la invención, el desarrollo de la intuición para responder de manera efectiva a las aspiraciones de la joven generación.

¡Es, bajo esta idea precisamente, lo que me induce a presentar en esta sección dos joyitas numéricas, a mi juicio muy interesantes, que estoy seguro gustará al lector!

- a) Hallar las tres últimas cifras del número  $3^{2019}$ .
- b) ¿Cuál de los dos números es mayor:  $888!$  ó  $300^{599}$ ?

**NOTA:** Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:

**[sapereaudethales@gmail.com](mailto:sapereaudethales@gmail.com)**





