

100

2018

1100100⁽²⁾

3201⁽³⁾

1210⁽⁴⁾

400⁽⁵⁾

244⁽⁶⁾

201⁽⁷⁾

144⁽⁸⁾

121⁽⁹⁾

100⁽¹⁰⁾

epsilon

Revista de Educación Matemática

Editada por la S.A.E.M. "THALES"

epsilon 100

Revista de Educación Matemática

Director

Alexander Maz

Comité Editor

Francisco España

Inmaculada Serrano

José María Vázquez de la Torre

Salvador Guerrero

Noelia Jimenez

Comité Científico

Evelio Bedoya,

Universidad del Valle, Colombia.

José Carrillo

Universidad de Huelva, España.

José Iván López Flores,

Universidad Autónoma de Zacatecas, México

José Ortiz,

Universidad de Carabobo, Venezuela.

Liliana Mabel Tauber,

Universidad Nacional del Litoral, Argentina.

M^a Mar Moreno,

Universidad de Alicante, España.

Matías Camacho,

Universidad de la Laguna, España.

Roberto Alfredo Vidal Cortés,

Universidad Alberto Hurtado, Chile.

Patricia Pérez Tyteca

Universidad de Alicante

Carlos de Castro

Universidad Autónoma de Madrid

M^a Jose Madrid

Universidad Pontificia de Salamanca

Página de la revista: <http://thales.cica.es/epsilon>

Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”

Edita

Sociedad Andaluza de
Educación Matemática “Thales”

Centro Documentación “Thales”

Universidad de Cádiz

C.A.S.E.M.

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Campus del Río San Pedro

Torre Central, 4^a planta

11510 Puerto Real (Cádiz)

Teléfono: 956012833

Email: thales.matematicas@uca.es

Maquetación

mayteando@gmail.com

Depósito Legal

SE-421-1984

ISSN

2340-714X

Período

2018

Suscripción

Anual

7

MONOGRÁFICOS

7

Constancia y perseverancia para llegar a 100 números de Épsilon
Alexander Maz-Machado

9

Número 100 un éxito
Salvador Guerrero

13

Cien números...
Sixto Romero Sánchez

19

Del 1 al 9. Epsilon, segunda época
Rafael Pérez Gómez

25

Epsilon: 100 números contribuyendo al desarrollo profesional
Antonio Moreno Verdejo

27

Épsilon 100. Las revistas de las sociedades de profesorado de matemáticas. Pasado, presente y futuro
Onofre Monzó del Olmo

37

Cien números en la historia de la revista *Épsilon* / One hundred as the numbers of the review *Epsilon*
M^a Teresa González Astudillo

49

INVESTIGACIÓN

49

El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en Probabilidad y Combinatoria / Tree diagram: an intuitive resource in probability and combinatorics
Antonio Francisco Roldán López de Hierro
Carmen Batanero
Pablo Beltrán-Pellicer

65

EXPERIENCIAS

65 **Trasladando la geometría de la pintura abstracta al geoplano/** Moving geometry from abstract painting to geoboard

Manuel Gómez Campos

Teresa F. Blanco

Valeria González Roel

77 **Conocimiento de las figuras planas a través del cuento /** Knowledge of flat figures through the tale

Ana Escudero-Domínguez

Ángela Arroyo-García

89

IDEAS

89 **Introducción del Teorema de Pitágoras y del Teorema del Coseno mediante el uso de balanzas /** Introduction of the Pythagorean Theorem and the Cosine Theorem by using scales

David Gutiérrez-Rubio

Carmen León-Mantero

María José Madrid-Martín

María Teresa Sánchez-Compañía

99

MISCELÁNEA

99 **RINCÓN “SAPERE AUDE”... ¿resolviendo problemas?**

Sixto Romero

Constancia y perseverancia para llegar a 100 números de Épsilon

Alexander Maz-Machado
Universidad de Córdoba

Para la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES es motivo de orgullo y satisfacción que su revista *Épsilon* alcance el número 100. En estos tiempos no es fácil que una revista de una sociedad de profesores, en la que toda la labor de gestión es de carácter altruista, perviva y continúe de forma ininterrumpida en el tiempo. A lo largo de estos 35 años la revista ha experimentado cambios normales en la estructura de sus secciones y en sus páginas ha quedado vestigio de cambios de todo tipo: cambios legislativos que han afectado a la enseñanza de las matemáticas, cambios en los paradigmas y en las agendas de investigación dentro de la educación matemática, la aparición de nuevos recursos didácticos, de nuevas metodologías didácticas y de la irrupción de las TICs.

En estos 100 números de *Épsilon* la revista ha contado con cuatro directores: Manuel Iglesias Cerezal del número 0 al 18, Javier Pérez Fernández del 19 al 57, Antonio Javier Moreno Verdejo del 58 al 72 y, desde el 73 hasta este número, el 100, Alexander Maz Machado.

Como todas las revistas creadas en los años 90, *Épsilon* empieza publicarse en formato papel y partir del año 2013 pasa a publicarse exclusivamente en formato digital, coincidiendo además con el aniversario de los 30 años de publicación de la revista. A partir del año 2015 la revista pasa a ser de acceso abierto. Estos dos últimos acontecimientos le han conferido mayor presencia a nivel internacional, especialmente en Latinoamérica.

Durante todos estos años la revista ha ofrecido diferentes modos de recepción y publicación de artículos. Durante sus primeros años de publicación abundaban los envíos a la revista debido a que no existía un gran número de revistas educativas en España y menos aún en Educación Matemática. Posteriormente se experimentó una etapa de escasez de envíos de propuestas para su publicación. Ahora, poco a poco, volvemos a observar una mayor afluencia de autores, especialmente latinoamericanos, con propuestas para publicar en nuestra revista. Creemos que este mayor flujo de recepción de artículos se debe, en parte, a la decisión de publicar con acceso abierto.

La revista se ha nutrido en gran parte por las aportaciones de profesorado en activo que ha querido compartir sus experiencias y propuestas para la enseñanza de las matemáticas. El otro gran colectivo que colabora con la revista son los investigadores que

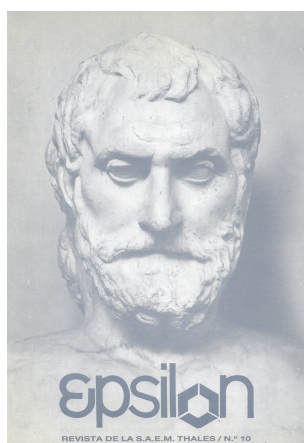
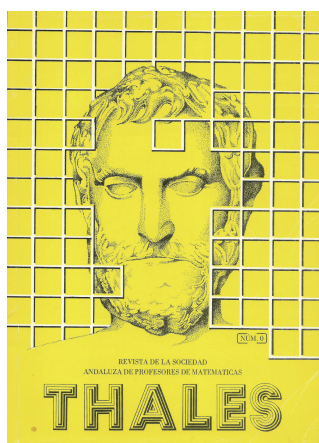
difunden sus investigaciones educativas relacionadas con las matemáticas. Lamentablemente este colectivo investigador ha visto como para su evaluación (acreditaciones, sexenios, oposiciones) solamente les son reconocidas las publicaciones indexadas en JCR o SCOPUS. Esto también ha quedado reflejado en la revista. Debido a que para Épsilon la prioridad en cuanto a publicación y autoría son los profesores de matemáticas, ya que fue creada por ellos, la investigación no es la prioridad (si bien tiene cabida en la revista e incluso una sección). Por tanto, nunca podremos aparecer en tales índices.

Para dificultar más el asunto, ahora es requisito para poder defender las tesis doctorales la publicación de artículos solamente en revistas indexadas, con lo que los jóvenes investigadores que estén iniciando su etapa como autores no tendrán interés en publicar en revistas como Épsilon. Considero que es un error, ya que son precisamente las revistas de este nivel las que permiten a los jóvenes investigadores adquirir destrezas en cuanto a la forma de presentar sus hallazgos. Afortunadamente aún contamos con investigadores con una trayectoria consolidada que comparten los resultados de sus investigaciones en Épsilon sin importarles que sea o no JCR o SCOPUS, ya que valoran otros aspectos.

En este número quiero expresar mis agradecimientos a todos aquellos que han hecho posible alcanzar los 100 números de Épsilon: a sus directores, a los equipos editoriales, a los asesores científicos, a los revisores, a los autores y a la Sociedad THALES porque sin su apoyo, colaboración y ánimo esto no hubiera sido posible.

Número 100 un éxito

Salvador Guerrero
Presidente Sociedad THALES



Haber llegado al número 100 en una revista de un ámbito tan minoritario como es la Enseñanza de las Matemáticas es un hito importante, y es un signo de vitalidad y esfuerzo de quien la promueve, la Sociedad Andaluza de Educación Matemática “THALES”, que con los avatares correspondientes a esta clase de revistas, la ha mantenido a lo largo de casi 35 años.

En realidad han sido 102 números porque hubo un número 0, y un número extraordinario entre los números 9 y 10, como segunda parte del número 8, dedicados ambos a las conferencias y comunicaciones más interesantes del Simposium Internacional sobre la Renovación en la Enseñanza de las Matemáticas, que se celebró en Sevilla en junio de 1986.

Los fines de la revista los expresaba nuestro añorado Gonzalo Sánchez Vázquez, primer presidente de la “Thales”, en el número 0 como “el deseo de proporcionar un órgano de expresión... para elevar y actualizar el nivel pedagógico de la enseñanza de las Matemáticas”, pero añadiendo que “no quiere ser sólo una revista para los socios, sino para todos los profesores y grupos interesados en ello aunque no pertenezcan a nuestra Sociedad”. Ese era el espíritu de ofrecer a toda la sociedad española el esfuerzo y el trabajo de la Sociedad “Thales”.

Dirigió la revista desde sus comienzos Manuel Iglesias Cerezal (QEPD) magnífico compañero y gran persona, con quien tantos años de trabajo en las aulas universitarias compartí, y que tuvo el enorme trabajo de poner en marcha la revista, gracias (todo hay que decirlo) al apoyo inicial de Juan Carlos López Eisman, director general (entonces, 1984) de Promoción Educativa y Renovación Pedagógica de la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía, y el apoyo constante de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla.

La revista nació a finales de 1984 con periodicidad cuatrimestral, y con unas 150 páginas de media aproximadamente, y desde entonces hasta el número 82 de 2012 así estuvo. Durante los primeros números (hasta el número 10, el nombre de la revista era “THALES. Revista de la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas”. En el curso 1987/88, se unificaron las dos sociedades de profesores que existían en Andalucía, la “Thales” y la “APMA” de Granada, que nació en 1984, y que editaba una revista con el nombre de “Epsilon”, que publicó 9 números incluido el extraordinario último dedicado a la Alhambra de Granada, y cuyo director fue Rafael Pérez Gómez, recogiendo así el testigo de otra homónima (4 números) que desde 1981 editaban algunos profesores de la Andalucía oriental. En la unificación se acordó que el nombre común de la sociedad resultante fuera “Thales” y el nombre de las dos revistas unificadas fuera “Epsilon” que siguió dirigiendo Manuel Iglesias. Precisamente a Rafael Pérez Gómez le hemos solicitado que nos narrara cómo fue la gestación de esos números de “Epsilon” antes de la actual EPSILON.

Aunque la Sociedad “Thales” se creó en noviembre de 1981, durante esos primeros años hasta tener nuestra propia revista, los socios estuvieron recibiendo ejemplares de la revista “Números” de la Sociedad Canaria “Isaac Newton” creada un poco antes de la nuestra, y aunque, una vez creada la revista de nuestra sociedad hubo alguna idea de fusión de ambas, al cuajar gracias al esfuerzo de los presidentes de ambas, Gonzalo Sánchez y Luis Balbuena, la creación de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), esta pasó a tener su propia revista SUMA, que dirigida por Rafael Pérez Gómez, empezaron a recibir también todos los socios.

No han sido muchos los directores que ha tenido la revista Epsilon lo que indica que han podido elaborar un trabajo fructífero a largo plazo. Después de 7 años de dirección de Manuel Iglesias (hasta el número 19), en 1991 se hace cargo desde Cádiz de la revista Francisco Javier Pérez Fernández, hasta el año 2003, (número 57, el último que dirigió), compatibilizando además con una gran labor como editor en la Sociedad de los facsímiles de obras clásicas de Matemáticas (Cauchy, Newton, Euler). Para el número 58 comienza a dirigir desde Granada la revista Antonio Javier Moreno Verdejo, que da un fuerte impulso a los trabajos de investigación en educación matemática, apoyado en los trabajos de los distintos Departamentos de las universidades, sobre todo andaluzas, donde se realizan investigaciones de esta naturaleza. Desde 2010 (número 75) pasa a dirigir desde Córdoba la revista Alexander Maz-Machado, quien finaliza el número 82 en 2012, y realiza el difícil trabajo de reconvertir la revista desde el formato papel a tener un formato on-line. pues en medio de la crisis económica que nos envolvía y que hacía imposible el elevado coste de impresión de la revista, la Junta Directiva decidió pasar a editar la revista on-line, a pesar del grave inconveniente que ello pudiera tener para nuestros

socios. Hasta este número 100, han sido 25 números los que ha dirigido Alexander Maz, tanto en uno u otro formato como habréis podido observar los lectores de la revista.

Repasando la colección de la revista se puede ver la evolución de la educación matemática, no sólo en Andalucía sino también en España y en todo el ámbito europeo. Hay números especiales dedicados a reuniones y congresos y desde un principio se puede observar la atención que la revista ha dedicado a los contenidos que se ha ido introduciendo en los currículos o se ha luchado por introducir (informática, geogebra, fractales, etc.), y temas necesarios para la formación del profesorado (historia de la matemática, filosofía de la matemática y lógica), así como la atención a las ideas de los principales propulsores de la innovación en la enseñanza de la matemática en España (Miguel de Guzmán, el propio González Sánchez Vázquez, Claudi Alsina, Luis Rico, Antonio Pérez, etc.) y tantos y tantas personas que es imposible citarlas todas, y que en su clase han hecho pequeñas innovaciones pero que con toda seguridad han sido un enorme paso para sus alumnos.

Durante estos años ha habido una gran cantidad de reuniones y congresos sobre Educación Matemática tanto en España como fuera de ella, y de muchos de ellos se ha hecho eco la revista Epsilon publicando artículos destacados de ellos, salvo del VIII ICME (Sevilla, 1996) cuyas actas se publicaron aparte. Asimismo se han publicado noticias y resúmenes de proyectos muy interesantes como los cursos Thales-Cica de formación del profesorado (18 ediciones), el proyecto ESTALMAT de formación de alumnos con talento matemático (14 ediciones), las Olimpiadas Matemáticas de Thales (34 ediciones), y gran cantidad de problemas para resolver y sus soluciones. Todas ellas son publicaciones de gran interés para el desarrollo y la difusión de la matemática en nuestra tierra.

La relación de los temas y personas que han publicado en estos 100 números de la revista, sería imposible ni siquiera de esbozar aquí, por su longitud, pero en el número doble 31-32 hay un extenso trabajo (creo que de Mariano Salmerón) que contiene un índice de artículos aparecidos hasta 1994 en las varias revistas Epsilon, donde aparecen 669, clasificados temáticamente (con descriptores de temas) y un índice de autores con alrededor de 700. Eso en sólo 10 años, y desde 1994 han pasado 24 años.

Es interesante constatar que en el número 75 apareció un artículo de Rafael Bracho, Alexander Maz y otros, con un análisis temático y cuantitativo sobre “La investigación en Educación Matemática en la revista Epsilon entre 2000 y 2009”. En el análisis de los trabajos en esa década aparecen 116 artículos de investigación de 178 autores. Todos estos datos nos sirven como idea del enorme trabajo, información y estudios que hay recopilado en estos 100 números de la Epsilon.

Y así llega a tus manos, querido socio y amigo lector, este número 100 del que deseamos obtengas el mayor provecho para tu formación y te sirva de apoyo para tu diario trabajo docente, que apoyamos desde esta Sociedad y del que esperamos la mejora, que tanto deseamos, en la formación de los alumnos andaluces.

Cien números...

Sixto Romero Sánchez
Universidad de Huelva
SAEM Thales-Huelva
sixto@uhu.es

“La razón teme la derrota, pero la intuición disfruta la vida y sus desafíos”
Paulo Coelho

La aventura de la revista de la Sociedad Andaluz de Educación Matemática (SAEM) Thales cumple cien números, desde el primero con Depósito Legal SE-476-1984, titulada *Revista Andaluza de Profesores de Matemáticas THALES*, 1984 a 1987, para denominarse EPSILON, 1987 a la actualidad (antes de la unificación en 1987 de la Asociación de Profesores de Matemática de Andalucía-APMA - y la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas el nombre de *EPSILON* correspondía a APMA durante el periodo 1984-1987).

Entre las revistas de primera línea en Educación Matemática, está nuestra revista, que puede ser considerada como un órgano de difusión excepcional de la SAEM Thales, institución sin ánimo de lucro, que desde mayo de 1981 cuándo se crea en Sevilla como consecuencia de la inquietud de profesores, fundamentalmente de bachillerato, pertenecientes a los Movimientos de Renovación Pedagógica (MRP'S) en la enseñanza de las Matemáticas propulsados inicialmente a partir de la mitad de la década de los años setenta (concretamente en Huelva lo iniciamos a partir del año 1980) ha informado, desde la creación y responsabilidad de organización de infinitas actividades, entorno a la mejora y calidad de la enseñanza de las matemáticas, en las diferentes épocas de su existencia, dirigidas a profesores y alumnos de todos los niveles.

Tengo el honor y la satisfacción de afirmar, humildemente, que soy uno de aquellos “locos” maravillosos”, liderados por nuestro admirado y querido Gonzalo Sánchez Vázquez, que participaron en la génesis de la creación de la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas, hoy denominada Sociedad Andaluza de Educación Matemáticas Thales: ¡mucho ha llovido desde entonces!

No quisiera extenderme demasiado ante la amable invitación de nuestro director de la revista EPSILON, el Prof. Alexander Maz, en colaborar en este testimonio que refuerza la acción de poner en valor su importancia al cumplir el número cien de “vida”, pero si dar la aserción de tres hechos notables: PRIMER número de la revista,

PRIMERAS JORNADAS ANDALUZAS DE MATEMÁTICAS y PRIMERA OLIMPIADA MATEMÁTICA.

El primer número bajo la batuta del siempre recordado, Manuel Iglesias Cerezal (mi profesor de Ecuaciones Diferenciales en tercero de carrera en el curso 1972-1973 y director hasta el año 1990, que en alusión a las palabras aparecidas en el **Número "0"** de Gonzalo Sánchez Vázquez, nuestro primer Presidente, escribía en el editorial "...*Creemos que hay que llegar a crear una revista de gran calidad con las demás sociedades... Una revista ambiciosa que sea y llegue a todos los profesores de Matemáticas...*") tenía como vocales a Isabel Barragán Pérez (su paso muy breve por la revista. Un emotivo recuerdo aparece en el número dos. "...*de su buen hacer profesional es una muestra de extraordinario valor el enorme afecto, ...de los que han sido alumnos suyos...*"), Braulio de Diego Martín, Julio Márquez Mosquera, Antonio Pozo Chia, José A. Rivero Bulnes y José Luis Vicente Córdoba aparece con varias secciones: Estudio de Matemáticas, Didáctica, Metodología y Experiencias, Informática, Actualidad, Matemáticas Recreativas y Problemas, en el que se reflejan las inquietudes del profesorado pertenecientes a los diferentes niveles de enseñanza en el momento procesal en que se contextualiza.

A mi juicio, es importante reseñar el texto de 1956 que aparece en sus primeras páginas relativo al Prof. Puig Adam: "...*Se trata de captar a nuestros alumnos para la Matemática, de que sientan el placer interno del esfuerzo ante metas alcanzables y estimulantes, de hacerles, en resumen, más deseable y más deseada la Ciencia que hasta ahora les ha servido de tortura...*".

Sesenta y dos años después suscribimos tal afirmación en el que subyace la idea de que *al profesor que enseña debe acompañarle siempre el profesor maestro.*

Las primeras Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas celebradas del 15 al 17 de septiembre de 1983 en Cádiz fueron organizadas por nuestra Sociedad cuya responsabilidad recayó en Francisco Benítez Trujillo, Manuel M. Bosch Lería, Manuel González Dávila, Manuel Martín Fernández, Francisco Javier Pérez Fernández y Antonio Varo Gómez de la Torre, con una importante implicación social e institucional que con el formato de conferencias plenarias, ponencias y comunicaciones hicieron realidad la culminación de la ilusión de un nutrido grupo de profesores convencidos de la necesidad de la búsqueda de nuevos métodos de enseñanza que fortaleciera el binomio *Enseñanza/Aprendizaje de las Matemáticas* que pudieran implementarse en los centros educativos de Andalucía desde la renovación e innovación para optimizar esfuerzos con la transmisión del conocimiento y experiencias en el aula.

En realidad fue el segundo reto, en cuanto a responsabilidad se refiere, ya que un año antes, en abril de 1982, se organizaron en Sevilla, las II Jornadas Nacionales sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas cuyo esquema recogía prácticamente la misma estructura citada ut-supra, conferencias plenarias, ponencias sobre un conjunto de temas propuesto por el Comité de Programa, conferencias semiplenarias, comunicaciones sobre ideas y experiencias, talleres prácticos sobre actividades desarrolladas por profesores en el aula y otras actividades como exposición de materiales didácticos y otros soportes. Destacar así mismo la presencia de conferenciantes de la talla de Emma CASTELNUOVO, Maurice Glayman y Pascual Llorente y la labor del Comité de Organización formado por Antonio Aranda Plata, Trinidad bando Casado, Manuel Iglesias Cerezal, José Mercado Vilchez, Antonio Martín Castilla, Isabel Ostalé Baeza, Antonio

Pérez Jiménez, Pedro Reyes Columé, Emiliano Romero Cabot, Victoria Ruiz Abascal, Gonzalo Sánchez Vázquez y Juan A. Suárez Vázquez.

Sin dudas, se trató de un paso cualitativo importante en la reciente creada sociedad que contó con la presencia de cerca de 500 profesores del territorio nacional que, a lo largo del tiempo como se ha demostrado, ha dado cauce a un extenso movimiento de profesores de Matemáticas aglutinados en la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) que ha servido para profundizar en la revisión de programas y métodos de enseñanza, sí como en la preocupación general de coordinar los diferentes niveles educativos desde primaria a la universidad.

La PRIMERA Olimpiada Matemática Thales se celebró en 1985 en Sevilla, dirigida a estudiantes de secundaria en su segundo curso.

Ante la pregunta frecuente que se hacen nuestros alumnos desde pequeños: *¿para qué sirven las Matemáticas?*, los profesores debemos dar respuestas claras y concisas. La enseñanza de las matemáticas ocupa un lugar central en los currícula escolar al que hay que dedicar, a mi juicio, más tiempo que el que actualmente se aplica, entorno a un 20% del tiempo disponible.

Entre las metas a conseguir cuándo enseñamos matemáticas debemos pensar en:

- a) Enseñar a razonar, discurrir, reflexionar, recapacitar y concentrarse.
- b) Enseñar a observar con detenimiento, analizar una situación, realizar conjeturas, diseñar estrategias y utilizar un razonamiento deductivo para probarlas.

En definitiva, saber que las matemáticas son muy útiles y necesarias en la vida cotidiana.

Han pasado ya treinta y cuatro ediciones de la Olimpiada Matemática Thales que han confirmado que con esta actividad se cultiva, fundamentalmente, el amor por las matemáticas mostrando un aspecto más agradable y divertido, fomentando el compañerismo, la confraternidad, la hermandad, la camaradería y las relaciones de amistad entre los niños y niñas participantes, concibiendo las Matemáticas como una parte más de su formación integral que les inculque valores tan importantes como la solidaridad, el compañerismo, el trabajo en equipo, la tolerancia, el espíritu crítico, etc.

En calidad de Presidente de la SAEM Thales me dirigía, a los participantes del XV CEAM celebrado en Baeza de 2014, con estas palabras que aparecen en el Prólogo del tercer libro de ESTALMAT, presentado en dicho evento: *“...Si las pirámides de Gizhé, el Faro de Alejandría, la Muralla China, la Torre de Pisa, ..., si los versos de Federico García Lorca, Miguel Hernández, Rafael Alberti, Pabo Neruda, Rbén Darío y Antonio Machado, ..., entre otros, pertenecen a nuestro modo habitual de observar y leer, no es menos cierto que Pitágoras, Thales, Al-Jwarizmi, Leonardo da Vinci, Newton, Leibniz, Cauchy, Lagrange, Hilbert, Fraudenthal, ...están presentes en nuestro quehacer profesional diario. Son historia marcadas por el tiempo y, a veces, denigradas por el hábito y también olvidadas en nichos oscuros de la memoria que parece que renacen en el ego humano necesario para añadir a nuestra voluntad de proseguir su trabajo, el trabajo de todos...la SAEM Thales, nuestra Sociedad es un proyecto que permite hacer mención al entusiasmo para desarrollar una determinada acción...”*.

Desde el año 1981 como socio de a pie, posteriormente con responsabilidad provincial en Huelva (¡aún quedan en mi retina las III Jornadas Andaluza sobre Didáctica de las Matemáticas-Un encuentro con Iberoamérica- celebradas en Huelva en abril de 1987.

Como Presidente del Comité Organizador tuve el honor de compartir varios días con Luis Antonio Santaló –Argentina-, Cristine Keitel-Alemania-, María Cristina Zambujo –Portugal-, Claudi Alsina –España-, María Antonia Canals –España-, Lucía Grugnetti -Italia- y Guy Brousseau –Francia- cuya presencia supuso un gran salto cualitativo en el panorama internacional de la Sociedad Thales!) y regional, como Presidente de la SAEM Thales, desde el año 2012 a 2016, me siento enormemente orgulloso de haber pertenecido y seguir perteneciendo a esta gran familia que ha conseguido importantes logros en Educación Matemática con los grandes bloques de actuación, Cursos Thales CICA, ESTALMAT ANDALUCÍA, INSTITUTO DE GEOGEBRA, OLIMPIADA MATEMÁTICA, CEAM's,...y la REVISTA EPSILÓN, con el VºBº de la mayoría de los socios aprobó en asamblea general de la SAEM Thales, celebrada en Sevilla el 13 de noviembre de 2015, pasar a ser de libre acceso a través de Internet en formato digital. El tiempo dirá si acertamos o no en la decisión.

La experiencia que hemos acumulado desde los inicios de la creación de la Sociedad Thales, con la realización de importantes, decisivas y variadas actividades incluidas en los boques citados ut-supra, nos ha permitido reflejar, en EPSILON, desde el número 1 hasta el 99 el acercamiento a la historia, la filosofía, la geometría, el arte, la ciencia, la economía, la cultura, la lectura en matemáticas, la matemática recreativa, los números, la estadística, la poesía, la modelización matemática, las representaciones gráficas, la calculadora científica, el cálculo científico, la programación dinámica, la interdisciplinariedad, la arquitectura, la cosmología, los polinomios,... Son temas que se han desarrollado desde 1981 a la actualidad y que ha permitido estimular el trabajo de profesores y que ha llegado de forma atractiva a niños y niñas atraídos por la belleza fascinante de las matemáticas. En mi caso, reseñar que hay también un periodo importante en mi vida en el que la presencia de las SAEM Thales estuvo desde 1991 en la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas, coincidiendo con la publicación del número 9 de SUMA, asumí la dirección de la revista SUMA hasta el número 19, en 1995.

En definitiva, quiero dejar patente que todas las actividades que hemos organizado, se debe, fundamentalmente, al apoyo incondicional de todas aquellas personas que han creído, creen y espero que seguirán creyendo en un proyecto que tiene como finalidad fundamental el fomento de la investigación, el desarrollo y la innovación y, específicamente, la promoción y la divulgación del conocimiento en cualquiera de sus formas en pro de la mejora y enseñanza de las Matemáticas. Debemos seguir trabajando en la creación de un espíritu de nuevos enfoques que tiendan a mejorar la Educación Matemática y que perduren como espacio no cerrado de convivencia y realidad.

En una sociedad como la nuestra en la que cada día se apuesta muy poco por la educación y la cultura, desde nuestra Sociedad debemos reclamar una mayor atención de los poderes públicos para conseguir que nuestro éxito venza el temor al fracaso. Quiero recordar en estos momentos al inquieto escritor italiano Carlo Dossi cuando afirma: "... *En muchas empresas para alcanzar la gloria no importa vencer, basta combatir*". Así es, y así debe ser.

Decía Ortega: "*Enseñar es primordialmente enseñanza de la cultura o transmisión a la nueva generación de ideas sobre el mundo y el hombre. Es necesario dar un orden jerárquico a las funciones de instituciones, y en concreto a la universidad, numerando cada una de éstas y poniendo como principal la cultura*".

Habría que añadir a este pensamiento, enseñar es primordialmente enseñanza de la cultura y educación y transmisión a la nueva generación de ideas del mundo y del hombre en el que las Matemáticas deben tener un rol preponderante: *Matemáticas para vivir juntos* en armonía. Es necesario dar un orden jerárquico a las funciones de instituciones, no solo universitarias, numerando cada una de éstas y poniendo como principal la educación y cultura.

Es tan difícil escribir y no empeñar las palabras, tienen las palabras tanto compromiso, son tan precisas, incluso las nacidas en el silencio, que en ocasiones hay tanto miedo y respeto, tanta implicación, son tan profundas que parezcan arrancadas, desquebrajada. Nuestra misión, como hombres y mujeres de Ciencias es seguir trabajando en el proyecto descartiano de convertir a las Matemáticas en una ciencia universal por la cual pueda elevarse nuestra naturaleza a su más alto nivel de perfección

En resumidas cuentas, nuestro compromiso, y así lo entiendo, es un compromiso con una idea, un sueño y una visión de lo que puede ser. Y mi sueño es que mi país, mi tierra, mi Sociedad Thales que es la vuestra, mis estudiantes, mi gente... alcancen su máximo potencial, independientemente de su sexo, condición, o de creencias, precisamente en un momento dónde las circunstancias son muy adversas. No queremos ni debemos doblegarnos nunca, creo sinceramente que la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, con su proyecto quiere depositar su confianza en todos sus asociados y simpatizantes, por la modesta y humilde importante contribución al mundo de la Educación Matemática en nuestro país, y a ello debe contribuir mayestáticamente la revista EPSILON, la consecución del número cien no ha sido gratuita: ¡aquí está!

Del 1 al 9. Epsilon, segunda época

Rafael Pérez Gómez

*Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Granada*

El 2 de Octubre de 2018, a las 18:25 horas, recibí el siguiente correo electrónico:

«Rafael, buenos días:

soy Salvador Guerrero, espero que te acuerdes de mí y sepas quien soy, a pesar de que hace tiempo que no nos vemos. Quería que hablásemos de un tema de trabajo, pero preferiría hacerlo por teléfono ya que no puede ser en persona. Pues queda muy frío hacerlo en un escrito. (...).Gracias, un abrazo.»

Si bien es cierto que Salvador y yo nos vimos por última vez el 17 de Septiembre de 2016 con motivo del Acto Inaugural del Curso 2016-2017 de Estalmat en su sede de Andalucía Oriental, en el que impartí la conferencia inaugural, nunca me olvido de mis amigos, entre los que se encuentra Salvador. En la década de los 80 vivimos juntos muchas situaciones en las que la Educación Matemática era protagonista. En ellas, además de mantener intensos debates guiados por la generosidad a la hora de aportar nuestros conocimientos sobre el tema que a todos nos unía, se forjaron relaciones de amistad que hoy siguen vivas.

Fueron unos años en los que se produjeron cambios profundos en Andalucía como consecuencia de los que se estaban dando en España. La finalización de mis estudios en Matemáticas en la Universidad de Granada coincidió con los últimos años del régimen franquista. Los cinco años siguientes los pasé como profesor contratado del Departamento de Geometría, Álgebra y Topología. Junto a asignaturas básicas de Álgebra, me asignaron la impartición de una Geometría Algebraica que, por primera vez, se enseñaría en el 4º curso de la carrera. El texto básico que utilicé por recomendación del catedrático del Departamento, D. Luis Esteban Carrasco, era el Fulton. Nunca he estudiado más. No para hacer la investigación que me condujera hacia la tesis doctoral, cosa impensable en aquel momento, sino porque estábamos dedicados a mejorar la docencia que sólo unos años antes habíamos recibido como estudiantes. En esta etapa de mi vida profesional tuve brillantes alumnos y alumnas en la Licenciatura de Matemáticas. Algunos pasaron a formar parte del profesorado de la Sección de Matemáticas de la Universidad de Granada

desarrollando en ella su carrera docente y otros, la mayoría, comenzaron a enseñar Matemáticas en colegios e institutos. Cuando pienso en esto me veo como esa hormiga que, en un determinado momento, va abriendo camino seguida del resto de la colonia y a la que pasan por encima cuando le faltan las fuerzas. Es esta una metáfora que dibuja perfectamente la profesión de profesor, en general, y de investigador, en particular.

Según pasaban los años, mi situación en la Universidad era cada vez más inestable. Estábamos en plena transición política de la dictadura a la democracia que hoy gozamos. Así pues, decidí presentarme a las oposiciones de instituto y resolver mi interinidad profesional. A mis 27 años era catedrático de Matemáticas de Enseñanzas Medias. A lo largo de diez años estuve destinado en varios institutos de las provincias de Málaga y Granada, aunque nunca me desvinculé de la Universidad de Granada. Aunque durante este periodo de tiempo me enriquecí enormemente como persona y culturalmente, seguía intentando hacer mi doctorado y volver a la Universidad.

Lo anterior explica el porqué, estando destinado en el Instituto Alonso Cano de Dúrcal, a 20 km de Granada, y yendo regularmente al Departamento del que había salido seis años atrás, Victoriano Ramírez me propuso que me hiciese cargo de una revista que habían creado en el Departamento de Análisis y a la que habían bautizado con el nombre de **Epsilon**. Cuatro años después, Victoriano dirigía un nuevo Departamento, el de Matemática Aplicada, que tuvo un rápido y gran crecimiento por su vinculación a las enseñanzas técnicas que emergieron en la Universidad de Granada, y me pidió que me incorporase a él. Atendí su ofrecimiento. Desde entonces pertenezco al Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada. Victoriano y yo somos grandes amigos y hace unos días le pedí que me precisara cómo consiguieron publicar Epsilon durante su primera etapa de vida. Reproduzco literalmente su respuesta:

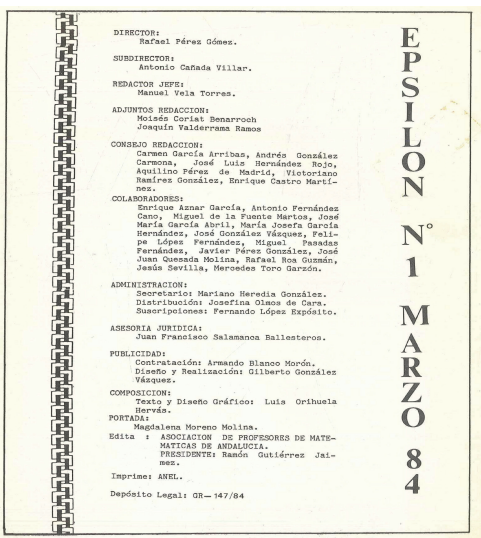
«Querido Rafael:

Me dijiste que antes de Navidad [de 2018] querías tener alguna información de los inicios de Epsilon. He tirado de la memoria de Antonio López Carmona [uno de aquellos brillantes alumnos a los que me refería antes, hoy compañero y gran amigo], que va años luz por delante de la mía, y me ha completado los nombres y fechas sobre los cuales tenía en duda.

Los encargados reales de la Revista en la época previa a tu entrada como director fueron: Fernando López Expósito, Francisco Linares Teruel y José Luis Gallego García. Antonio López Carmona y yo le echábamos una mano (ya que no disponíamos de mucho tiempo por estar liados con la tesis).

Salieron tres números, encuadernados en cartulina blanca y sin nada de publicidad. Antonio escribió algo sobre las memorias de los ordenadores empezando por la “pascalina”, primera calculadora inventada por Pascal en 1642, y los núcleos de ferrita, entre otras cosas. En el segundo número, Mariano Gasca hizo una introducción del Análisis Numérico que se impartía en la UNED, con algunos cambios, obviamente, sobre el tema de la coma flotante, dígitos significativos y demás. Algunas cosas de los números 0 y 1 se hicieron con la IBM que teníamos en Ecuaciones Funcionales y con la máquina automática del Dpto. de Geometría, Álgebra y Topología. Recuerdo a José Luis Gallego como uno de los que más esfuerzos tenía que hacer. Venía desde Lorca y se hospedaba en un Hostal de Camino de Ronda. Las reuniones las hacíamos en mi Departamento.

*Un abrazo,
Victoriano.»*



Los ejemplares de los pocos números que consiguieron publicar eran fotocopias que eran distribuidas por los pasillos de la Facultad de Ciencias y algunos institutos de Granada y Murcia, fundamentalmente. No cabe mayor altruismo ni generosidad. Las Matemáticas debían divulgarse a toda la sociedad y, de forma especial, seguir contribuyendo desde la Universidad en la formación permanente del profesorado impartían docencia en colegios e institutos. Mi reconocimiento a este grupo de compañeros por su acierto y ahínco. Sin embargo, su ilusión no les impedía ver la realidad. Todos eran conscientes de las limitaciones que tenían tanto el procedimiento como la organización que desarrollaron. Creo que esa fue la razón principal por la cual Victoriano me pidió que tomase las riendas de Epsilon. Acepté encantado tras exponerle un plan con el que intentaríamos llegar un poco más lejos: crear una Asociación de Profesores de Matemáticas cuyo órgano de expresión fuese Epsilon. Y así, sin sospechar que estaba metiéndome en un gran charco, inicié la segunda etapa de la revista Epsilon.

Invité a Ramón Gutiérrez Jaime, entonces catedrático de la Universidad de Granada de Estadística y que anteriormente lo había sido de Enseñanzas Medias, a presidir la Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía (APMA) y a Luis Rico Romero, entonces catedrático de Escuela Universitaria en Magisterio, para que ocupara la vicepresidencia. La llegada de Luis supuso un gran impulso para la mejora y difusión de Epsilon al aportar buenísimas ideas, incorporar a una serie de personas de su entorno y, sobre todo, iniciar la andadura internacional de Epsilon basada en una acertada política de intercambios con otras revistas y centros de documentación científica. Poco a poco fui aglutinando un excepcional grupo de amigos y amigas que, con la mayor generosidad que nadie pueda imaginar, se pusieron manos a la obra. En marzo de 1984 publicamos

SUMARIO

1.-ARTICULOS.

- 1.1.- Introducción al muestreo, su experimentación y matematización.
Isidro Gutiérrez Salas. Catedrático de Estadística. Universidad de Granada.....5
1.2.- Álgebra Cometa.
Eugenio Miranda Palacios. Adjunto de la Universidad de Granada.....17
1.3.- Concepto de número en E.G.B.
NCEP de Cádiz.....27

2.-PRACTICA.

- Por Aquilino Pérez de Madrid y Carmen Garofa Arribas, Catedráticos de Bachillerato.....37

3.-INFORMÁTICA.

- 3.1.- Informatización de un Centro de Enseñanza: I.B. "Emilio Muñoz" de Cogollos Vega (Granada).
Manuel Reyes. Agregado de Física y Química.....55
3.2.- Dentro de un orden.
Moisés Cortiá Benarroch. Agregado de Bachillerato.....67
3.3.- Números con demasiadas cifras.
Andrés González Carmona. Catedrático de Bachillerato.....73
3.4.- Recursividad en basto.
Moisés Cortiá Benarroch. Agregado de Bachillerato.....77
3.5.- Encuesta sobre el estado de informatización en los Centros.
Equipo de Redacción de la Revista.....81

4.-EXPERIENCIAS EDUCATIVAS EN MATEMÁTICAS.

- 4.1.- Información de la Junta de Andalucía sobre las experiencias que apoya en Matemáticas, Informática o Pedagogía.....92
4.2.- Metodología en la Investigación de la Matemática.
Juan Díaz Godino. E.U. de Formación del Profesorado. Jaén.....94

5.-EDUCACION Y CULTURA.

- Por José Luis Hernández Rojo. Catedrático de Bachillerato.

- 5.1.- Entrevista con Manuel Gracia, Consejero de Educación de la Junta de Andalucía.....102
5.2.- Homenaje a Julio Cortázar y Jorge Guillén.....116

6.-RESERVA DE LIBROS Y REVISTAS.

- Equipo de Redacción de la Revista.....118

7.-INDICE PUBLICITARIO.

- 7.1.- Editorial Andalucía.....ca
7.2.- Editorial Bruño.....16a
7.3.- Ediciones Hermann.....16
7.4.- Informática y Electrónica.....76
7.5.- Tecnigrá.....86

Editorial

Se de obligado cumplimiento que al iniciarse la andadura de una publicación se dé contestación a las "cincos W" consagradas por el buen hacer periodístico: Who? (¿Quién?), Why? (¿Por qué?), Where? (¿Dónde?), When? (¿Cuándo?), What? (¿Qué?).

W. ¿Quiénes se atreven a editar esta revista?

El pasado día 4 de Febrero, 132 amigos de la Matemática se reunieron en Granada para firmar el ACTA FUNDACIONAL de la Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía. En los Estatutos aparecen sus fines y entre éstos la publicación de la revista "EPSILON". Es éste un nombre que, según formaciones matemáticas, estará mejor o peor visto, pero su carácter sí es bien conocido por todos: tan pequeño como se quiera y a la vez importantísimo, por estar presente en los conceptos fundamentales de la Matemática y trazar fronteras, sujetas a variación, que aglutinan alrededor de un objetivo infinito de elementos, dejando fuera muy pocos. Así quiere ser EPSILON, un objetivo que reúna a todos los admiradores de la Matemática y que, por esta vez, no deje a nadie fuera.

W. ¿Por qué es un objetivo de la Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía esta publicación?

De todos es conocida la desconexión existente entre niveles educativos, el desconocimiento de experiencias que hacen otros compañeros, la ignorancia de muchos acerca de caminos a seguir para obtener ayudas, que nos permitan avanzar en nuestros proyectos educativos, la imposibilidad de asistencia a todos los cursos o seminarios que se organicen, o que la misma Asociación organice, etc. Por eso queremos servir estas páginas como ayuda en vuestro trabajo y como medio de expresión de la Asociación.

W. ¿Dónde estaremos a vuestra disposición y recibiremos las colaboraciones?

Es nuestro deseo abrir los locales de la Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía, que son los de la Revista (Sección de Matemáticas - Facultad de Ciencias - de la Universidad de Granada) a todos vosotros para que enviando allí vuestras colaboraciones, mejoramos cada día nuestra publicación.

W. ¿Qué periodicidad va a tener "EPSILON"?

Nacemos en 1984, año bisieto. Según algunos los años bisietos son necesariamente nefastos. Esperamos con muchísima ilusión que no sea así para "EPSILON" y podamos, puntualmente, estar con vosotros, asociados y lectores, al finalizar cada trienio.

W. ¿Qué van a contener las páginas de "EPSILON"?

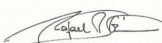
Indudablemente una revista es lo que sus lectores desean que sea. Vosotros vais a ser quienes con vuestros artículos, experiencias, sugerencias o críticas diseñéis cada uno de los números que, con el tiempo, han de salir.

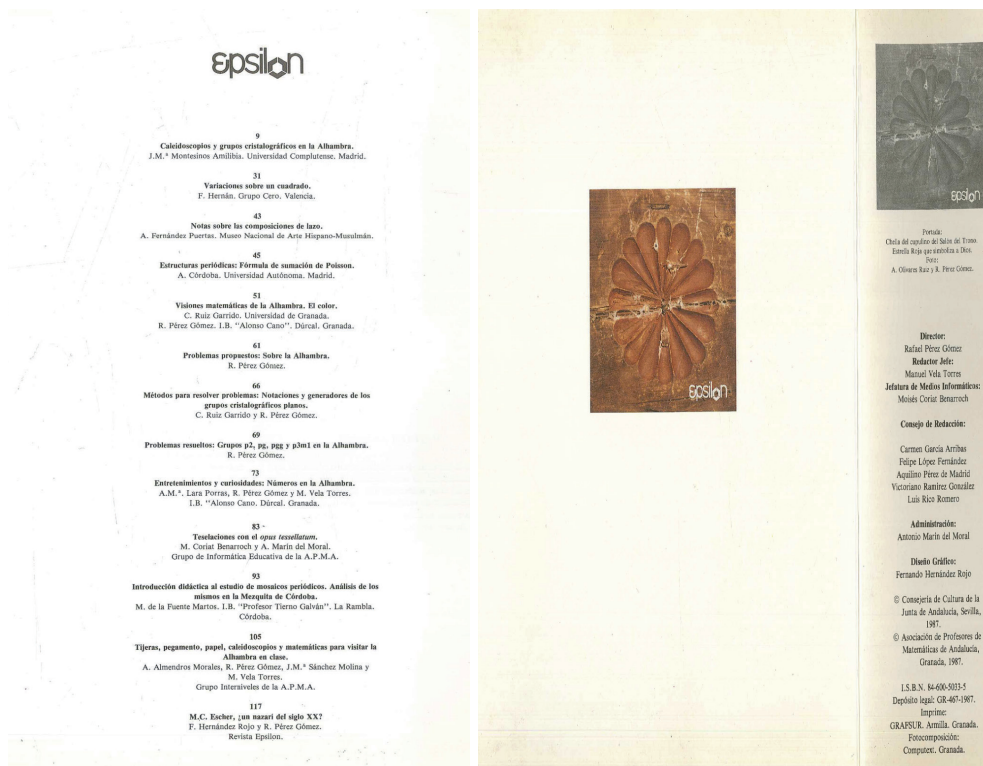
Distribuimos este espacio en seis secciones: Artículos, Experiencias sobre la enseñanza de la Matemática, Informática, Problemas, Libros y Revistas y Comentarios sobre temas educativos de actualidad.

Cada uno de los equipos que están al frente de cada sección encabezan las de este número con una explicación de sus pretensiones iniciales. Baste desde aquí decir que, en general, pretendemos ocupar ese amplio campo, despoblado y desierto, que existe entre las Revistas de Investigación especializadas y las publicaciones hechas con más corazón que calidad. Así pues, aunque tenemos puesto todo nuestro corazón en esta empresa, procuraremos cuidar al máximo la calidad de estas páginas y las llenaremos con vuestro serio trabajo para poder ser leído por todos los que rendimos admiración, cariño y respeto hacia la Matemática, desde profesionales en E.G.B. hasta los de la Universidad.

Hay, además, otra W famosa: How? ¿Cómo hemos podido hacer este primer número de la revista? Aparte de trabajar intensamente, aprender algo sobre composición de textos, enmquetado, fotocolor, gestiones publicitarias, etc., hemos contado con ayudas inestimables sin las que no hubiese sido posible llevar a buen puerto esta nave. Queremos mostrar nuestro agradecimiento sincero al Director del Departamento de Ecuaciones Funcionales -Sección de Matemáticas de la Universidad de Granada-, Prof. Dr. D. Pedro Martínez Amores, por los locales y medios materiales que su Departamento ha puesto a nuestra disposición. D^a María Angustias Valenzuela Morales y D^a María Angustias Villoslada Cadenave se han desvelado para ayudarnos -sin perder la paciencia- en el tratamiento informático de los textos. Gracias.

Esperando vuestra colaboración y entusiasmo por esta labor, queda en nombre del Consejo de Redacción a vuestra entera disposición.





el primer número de la segunda época de Epsilon, cuyas cuatro primeras páginas se reproducen a continuación. En la primera figura el equipazo al que antes aludía. A todos y todas les debo gratitud por la ilusión y empeño que pusieron para sacar adelante la revista. Es esta una magnífica ocasión para mostrarles mi reconocimiento públicamente y, sobre todo, para solicitar que la comunidad de profesores y profesoras de Matemáticas rinda homenaje a su memoria.

¡Qué tiempos aquellos! Sin experiencia en publicaciones, y sin apenas medios (basta observar que las tildes eran puestas a mano sobre los textos sacados en impresoras de agujas), conseguimos sacar nueve números. El noveno, y último de esta segunda etapa, fue el famoso monográfico sobre La Alhambra que fue publicado en 1987. La evolución de la revista, tanto en su edición como en su capacidad de impacto, sólo puede explicarse desde la dedicación y saber hacer de todos los que le dedicamos innumerables horas de nuestro tiempo. Pero, sin duda alguna, mereció la pena.

Mientras todo esto sucedía teniendo como centro neurálgico a Granada, supe de la existencia de otra Sociedad de Profesores de Matemáticas Thales. Su sede estaba en Sevilla y venía desarrollando sus actividades desde 1981. Entre ellas se encontraba la edición de la Revista Thales que, bajo la dirección de Manuel Iglesias Cerezal, consiguió publicar diez números.

Aunque era evidente que tenía poco sentido la existencia de dos asociaciones con idéntico fin en Andalucía, no resultó fácil reconducir la situación. Durante los cuatro

años que estuve al frente de Epsilon maduraron las conversaciones que mantuvieron la APMA y la Sociedad Thales. Finalmente se logró constituir una única asociación de profesores y profesoras de Matemáticas de ámbito andaluz: la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Se acordó mantener los dos nombres que habían adquirido proyección nacional e internacional: el de Thales para identificar la nueva sociedad y el de Epsilon para su órgano de expresión.

A partir de entonces comienza la tercera etapa de la revista Epsilon con un nuevo director, Manuel Iglesias Cerezal. Entonces fue cuando quienes habíamos llevado Epsilon hasta ese momento aceptamos un nuevo reto: crear una nueva revista, SUMA, como medio de expresión de la recién constituida Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Así llegamos al año 1987 en el cual nuestro querido, y siempre añorado, Gonzalo Sánchez Vázquez ocupó la Presidencia de la FESPM, cargo que simultaneó con el equivalente de la SAEM Thales que venía ostentando desde su constitución.

El resto de la historia de Epsilon ya lo conocéis. Con tesón y acierto se ha llegado al número 100, razón por la cual Salvador Guerrero me pidió que escribiera estas líneas. Debemos felicitarlos por ello y desear que ese número tienda a infinito.

Epsilon: 100 números contribuyendo al desarrollo profesional

Antonio Moreno Verdejo
Universidad de Granada

Un número 100 es un buen momento para realizar una reflexión sobre la evolución de la revista EPSILON. El período en el que nos responsabilizamos de la revista como equipo editorial fue el comprendido entre los años 2004 y 2011.

La revista de profesores de matemáticas EPSILON la entendimos siempre como un intercambio de experiencias y reflexiones compartidas entre los profesionales de la educación matemática. Esto aportaría un crecimiento del conocimiento que el profesor de matemáticas utiliza y construye en su trabajo diario. Así, la revista es un instrumento para el desarrollo profesional de los docentes de matemáticas de todos los niveles educativos.

En la Educación Matemática encontramos dos discursos derivados de las diferentes prácticas. El discurso de los profesionales que desarrollan su actividad en sus aulas dentro de contextos definidos y por otro lado el discurso de la investigación que analiza e interpreta esas prácticas con el fin de comprender la práctica docente. Desde el equipo editorial sabíamos que asumíamos el reto de ofrecer la revista como un espacio para compartir las reflexiones de ambos discursos. Buscamos el modo de ofrecer desde la revista, tanto experiencias educativas como transferencia de resultados de investigación en educación matemática.

De alguna manera, a lo largo de su historia, EPSILON ha realizado siempre esa labor y una revisión crítica de su estructura y sus contenidos junto con el contexto educativo y social en el que aparecen publicados nos aportaría una información interesante sobre cómo se construyen los discursos de la práctica y la investigación en cada momento.

El período en que nosotros nos involucramos con la revista suponía una transición en algunos aspectos de la educación matemática andaluza. Por un lado, se implantó una nueva Ley educativa, la Ley Orgánica de Educación (LOE). La introducción de esta Ley suponía, entre otros muchos cambios, la aparición de las competencias matemáticas en el currículo, el uso de los conocimientos en contextos y el paso a un currículo de carácter funcional.

Por otro lado, aparecen las primeras publicaciones de los resultados de los resultados de las evaluaciones PISA.

Los resultados de estas evaluaciones se convirtieron en una competición internacional en la que los docentes, el sistema educativo o ambos se jugaban el prestigio permanentemente. Una noticia de agencia publicada por El País titulaba así: “China toma la delantera en la Olimpiada de Matemáticas” y subtitulaba, no sin retransa: ”Los seis participantes chinos aseguran haber resuelto todas las pruebas, “que no eran difíciles” -Dos de los seis españoles no consiguen acabar el último de los tres ejercicios-”.

Fue en este período en el que gestionábamos la revista EPSILON cuando se gestó otro acontecimiento fundamental para el profesional de la educación matemática: la desaparición del CAP y la creación del Máster de Formación del Profesorado de Enseñanza Secundaria y Bachillerato. Esta transformación significa un cambio en la concepción de las competencias profesionales del profesor de matemáticas y evidentemente todo lo que conlleva en la formación de profesores de todos los tipos y niveles.

Este contexto influyó en la estructura y contenidos de la revista en ese momento. Así, la transferencia de resultados de investigación, la innovación educativa y el estado de conocimiento de un tema tenía cabida en la sección de *Artículos*. La turbulencia de los cambios se canalizaba en la sección *Debate*. Los resultados del informe PISA, el uso de las calculadoras gráficas en el aula y en la prueba de Selectividad, el proceso de evaluación de diagnóstico en Andalucía, la utilidad de las matemáticas, el Practicum del Máster del Profesorado de Secundaria de Matemáticas, y la perspectiva solidaria de la educación matemática fueron temas que se enfocaron desde perspectivas diversas con la intención de generar un espacio de reflexión.

Los cambios metodológicos y de contenidos que implicaron los cambios legislativos del momento tenían su reflejo también las secciones y contenidos de la revista. La sección *Problemas comentados* planteaba problemas para su resolución y analizaba sus posibles soluciones basándose en la idea de que la resolución de problemas es la piedra angular del aprendizaje y conscientes de la dificultad de su introducción en clase.

Para ayudar en ese cambio metodológico, la revista mostraba actividades prácticas y posibilidades didácticas tanto del uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas como de distintos materiales y juegos. Allí estaban las secciones *TIC* y *+ que una asignatura*. Los contextos como situaciones que aportan significado al concepto matemático se mostraban en la sección *Reflejos matemáticos*.

El desarrollo de la tecnología de la información cambiaba algunos aspectos de la competencia profesional. Entre ellos su capacidad para aprender y formarse de manera continua y a lo largo de su carrera profesional. Por ello EPSILON, en la sección *El saber sí ocupa lugar*, se ocupó de incluir informaciones publicadas tanto en papel como en otros soportes. Permitiendo que el profesorado pudiera disponer de reseñas de trabajos o bibliografía comentada que podían ser de interés sobre un tema relacionado con las matemáticas y su enseñanza y que pudieran servir al profesorado para enriquecer su trabajo.

La revista por tanto, estuvo y sigue estando al servicio de los profesores de matemáticas y su necesidad de ampliar sus conocimientos.

La revista EPSILON, a lo largo de su historia, a contribuido al desarrollo profesional del docente de matemática. Por ello debemos alegrarnos de que se alcance una cifra tan significativa como 100 números y deseársle mucha vida para seguir ayudando a los profesores y profesoras de todos los niveles educativos. ¡Felicidades!

Épsilon 100. Las revistas de las sociedades de profesorado de matemáticas. Pasado, presente y futuro

Onofre Monzó del Olmo.

Presidente de la FESPM

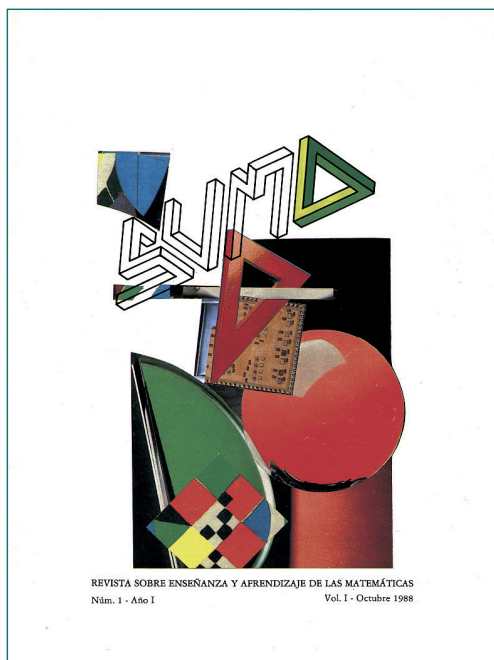
Quando sales para hacer el viaje hacia Ítaca,
has de rogar que sea largo el camino,
lleno de aventuras, lleno de conocimiento.
Has de rogar que sea largo el camino,
que sean muchas las madrugadas
que entrarás en un puerto que tus ojos ignoraban
que vayas a ciudades a aprender de los que saben.
Ten siempre en el corazón la idea de Ítaca.
ÍTACA. C. P. CAVAFIS
(Traducción de la adaptación de Lluís Llach
sobre una versión catalana de Carles Riba)

LOS ORÍGENES

Estamos de enhorabuena: celebramos que una revista dedicada al aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas llega a su número 100.

Para entender el origen del conjunto de revistas que tratan sobre la Educación Matemática hay analizar el nacimiento de las sociedades de profesores que las publican. La primera sociedad que surgió en España fue la Sociedad Canaria “Isaac Newton” de Profesores de Matemáticas, en 1978; en 1980, lo hizo la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas “Thales”, y en 1981, la Sociedad Aragonesa “Pedro Sánchez Ciruelo” de Profesores de Matemáticas. En 1984 se constituyó la Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía. En 1987 se fusionaron las dos sociedades andaluzas, adoptando el nombre de Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”.

En 1988, nace la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM). A partir de este momento empiezan a constituirse asociaciones de profesorado de Matemáticas. En la actualidad son 22 las sociedades de profesorado integradas en la FESPM, con representación en la totalidad de las comunidades autónomas de España.



Esta proliferación de sociedades lleva aparejada la realización de gran cantidad de actividades de formación del profesorado, académicas, divulgativas, etc. y, en algunos casos significativamente relevantes, el fomento de la comunicación y difusión a través de las revistas científicas que las propias sociedades han ido editando.

En este contexto hay que viajar hasta 1981 a las islas Canarias para encontrar los orígenes de la revista decana de las sociedades de profesorado de matemáticas en nuestro país. *Números*, que publica la Sociedad Canaria “Isaac Newton” de Profesores de Matemáticas. Aunque como recogen Rico y Sierra (1994) debemos remontarnos a 1876 para encontrar las primeras referencias sobre Educación Matemática en el Boletín de la Institución Libre de Enseñanza (BILE).

Un poco después, en 1984, encontramos la revista *Thales* de la mano de la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas “Thales” y *Epsilon* que publica la Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía. Ambas coexistieron hasta la fusión, en 1987, de las dos sociedades. A partir de 1987 la nueva Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales” continúa con la edición de *Epsilon*.

Después vinieron *Suma* que publica la FESPM, desde 1988, *el boletín de ENCIGA* (1988), *Biaix FEEMCAT* (1992), *Gamma AGAPEMA* (2001)...

Hay que recordar que aquellos eran momentos de cambios importantes. Desde finales de 1985 empiezan a surgir en las universidades españolas los Departamentos de Didáctica de las Matemáticas ligados en un principio a las Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado de E.G.B. y a los estudios de magisterio. A la vez empieza la Reforma de las Enseñanzas (tanto en Primaria como en Secundaria) y su experimentación.

En este contexto es donde los grupos de profesores de matemáticas más activos fundan las primeras sociedades de ámbito autonómico y la FESPM.

Las revistas de las sociedades de profesorado nacen, junto a las sociedades que las editan, ante unas expectativas inabordables individualmente y un interés en participar, como profesionales, en el futuro de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Es decir, reunir las nuevas iniciativas, propuestas, investigaciones, reflexiones... que tanta falta nos hacen.

Esa inquietud y ganas de implicarse del profesorado de matemáticas se encuentra en el ofrecimiento de Luis Balbuena, Vicepresidente de FESPM, en el Editorial del número 3 de *Suma* (primavera de 1989):

... los Grupos y Sociedades de Profesores pueden ofrecer al sistema educativo una serie de servicios que las administraciones educativas difícilmente pueden cubrir. Los resumimos como sigue:

Actuando como asesores/consultores en:

1. la elaboración de propuestas generales sobre educación;
 - 1.1. La elaboración de prospectivas sobre diseños curriculares abiertos y flexibles;
 - 1.2. los estudios sobre las necesidades detectadas en el profesorado relacionados, especialmente, con su perfeccionamiento;
 - 1.3. el conocimiento directo de personas y planes que se desarrollan en otros países.
2. Actuando como «animadores sociales» del cambio:
 - 2.1. ofreciendo al profesorado sus revistas periódicas para el intercambio de experiencias;
 - 2.2. ofreciendo al profesorado sus hemerotecas y centros de documentación en general, mediante boletines de sumarios que le ayudarán en su labor de actualización científica y didáctica;
 - 2.3. siendo sus jornadas, congresos, seminarios, ... un lugar de encuentro para el debate y el contraste de pareceres;
 - 2.4. formando grupos de trabajo que tuvieran como finalidad el estudio de la enseñanza y el aprendizaje en general y de su disciplina en particular;
 - 2.5. ofreciendo, de entre sus miembros, profesores especializados en temas diversos que cuentan no sólo con amplia formación e información sino, además, con el asesoramiento de especialistas cualificados;
 - 2.6. elaborando materiales didácticos que aporten soluciones a problemas nacidos de experiencias e innovaciones educativas;
 - 2.7. fomentando la participación en torneos, concursos, etc., que sirven para popularizar su disciplina a la vez que orientan sobre temas curriculares de actualidad.

Esperamos que tras la consulta, se recoja, en documentos finales, una mención expresa sobre lo que pudiera ser el papel de Grupos y Sociedades en ese futuro próximo de la educación por el que todos hemos apostado.

Bajo estas premisas las revistas recogen:

- *Artículos* en los que se incluyen trabajos que contribuyan a mejorar nuestro bagaje sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.
- *Ideas para la clase* que incluyen artículos con sugerencias que, de modo fácil y cómodo, se puedan incorporar a las clases.
- *Recursos para el aula* en los que se describen distintos materiales indicando sus posibles usos didácticos.
- *Informaciones* sobre múltiples aspectos que pueden interesarnos. Congresos, exposiciones, libros, etc.

EL VIAJE

El viaje, tanto el de las revistas como el de las sociedades que las editan, no ha sido todo lo plácido que cabría desear. Desde su nacimiento el panorama educativo español ha vivido la promulgación de las siguientes leyes educativas:

- Ley Orgánica reguladora del Derecho a la Educación (LODE) de 3 de julio de 1985.
- Ley Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE) de 1990.
- Ley Orgánica de Calidad de la Educación (LOCE) de 2002. Ley publicada en 2002, pero que no llegó a aplicarse por el cambio de gobierno de 2004.
- Ley Orgánica de Educación (LOE) de 2006.
- Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) de 2013. Ley publicada en 2013, pero que se ha paralizado su total aplicación por el cambio de gobierno de 2018.

Todo esto ha supuesto que los maestros, profesores de E.G.B., denominación que tenían en aquella época, volverán a tener docencia sólo en la enseñanza Infantil y Primaria. Y el profesorado de BUP y F.P., fusionados en el nuevo cuerpo de Profesores de Secundaria, tendrán competencia en toda la Secundaria (Obligatoria y Bachillerato). La enseñanza pasará a ser obligatoria hasta los 16 años. Desaparecerá la doble vía de formación, BUP/F.P... Estos cambios exigen un nuevo perfil de profesorado.

Se abre una nueva etapa en la enseñanza en España, es tiempo de Libro Verde (Hacia la Reforma) y Libro Blanco para la Reforma del Sistema Educativo. De Diseños Curriculares Base, de Objetivos Generales, de Capacidades, de Bloques de Contenido, de Contenidos, procedimientos y actitudes, de Criterios de Evaluación, ... de Metodología.

Es un tiempo de incertidumbre y entonces, más que nunca, hace falta un referente donde recoger propuestas, las de aquí; grupos Cero y Zero, *Arzaquiel*, *Beta*... y las que se hacen en otros países; como en Francia, en los IREM; que dice Brouseau... Cuáles son las propuestas de Freudenthal y del IOWO (OW&OC). Qué son los Estándares de la N.C.T.M., cómo funcionan los centros de profesores ingleses...

La LOE nos trajo otro cambio de paradigma, ahora es tiempo de competencias, tecnología, pruebas externas, evaluaciones internacionales (PISA, TIMSS)...

En este contexto, donde el profesorado no se encuentra ni reconocido ni incentivado, es donde *las revistas* siguen *siendo* ese foro de debate, de expresión, ... Ese escaparate donde compartir ilusiones, experiencias, desasosiegos, donde fijar posiciones,... y *otra vez*, hoy más que nunca, siguen *siendo* imprescindibles en nuestro trabajo como profesores de Matemáticas.

EL RECONOCIMIENTO

El viaje de las revistas de las sociedades de profesores de matemáticas no ha sido fácil en el proceloso mar de los cambios educativos. No siempre las administraciones ha aceptado el ofrecimiento que ya hizo Luis Balbuena en 1989. Ni en muchos casos se ha reconocido el trabajo realizado por el profesorado, generalmente, más

activo de nuestro país que ha dedicado gran parte de su tiempo libre a dirigir las revistas, impulsar que se presenten trabajos, experiencias, evaluarlas y ni por supuesto, de los que han decidido, compartir sus investigaciones, experiencias de aula, materiales, reflexiones...

Como ya he mencionado estas revistas nacen del esfuerzo del profesorado de Primaria, Secundaria y de los Departamentos de Didáctica de las Matemáticas. Pero muchas veces este trabajo no es reconocido o los requisitos administrativos para su reconocimiento hacen que, aparte del trabajo inherente a la edición de una revista haya que añadir más tareas administrativas.

Para el profesorado de Primaria y Secundaria, si quieren que se les reconozca su trabajo, por ejemplo, para el concurso de traslados (BOE Núm. 239 Miércoles 3 de octubre de 2018 Sec. II.B. Pág. 95911) es necesario presentar:

- b) Revistas en sus distintos formatos (papel o electrónico):
 - Autor hasta 0,2000 puntos
 - Coautor hasta 0,1000 puntos
 - 3 o más Autores hasta 0,0500 puntos
 - En el caso de revistas (en papel, DVD o CD), la siguiente documentación:
 - * Los ejemplares originales correspondientes.
 - * Certificado en el que conste: el número de ejemplares, lugares de distribución y venta, o asociación científica o didáctica, legalmente constituida, a la que pertenece la revista, título de la publicación, autor/es, ISSN o ISMN, depósito legal y fecha de edición.

En relación con las revistas editadas por Administraciones Públicas y Universidades (públicas/privadas), que no se han difundido en establecimientos comerciales, además de los datos anteriores, en el certificado deben constar los centros de difusión (centros educativos, centros de profesores, instituciones culturales, etc.).

- En el caso de publicaciones que solamente se dan en formato electrónico, para ser valorados se presentará un informe, en el cual, el organismo emisor certificará que la publicación aparece en la correspondiente base de datos bibliográfica. En este documento se indicará la base de datos, el título de la publicación, autor/es, el año y la URL.

Nuestras sociedades son entidades sin ánimo de lucro para las que poder cumplir estas condiciones hace que necesiten una estructura administrativa a añadir al trabajo de gestión de las actividades.

Para el profesorado universitario que necesita acreditar su trabajo, las agencias evaluadoras, no valoran el trabajo realizado sino el prestigio de la revista donde se ha publicado. Podríamos pensar que las revistas de más *calidad* son las que publican los mejores trabajos. Pero si analizamos cuáles son los criterios que utilizan algún índice como *Latindex* (Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal) o alguna agencia de evaluación como la *Comisión Nacional Evaluadora de la Actividad Investigadora (CNEAI)* o la *Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación (ANECA)*(Tabla1) observamos que son mayoritariamente técnicos y no entran en la calidad de los trabajos publicados.

Tabla 1: Criterios de calidad para evaluar las revistas

Latindex	CNEI	ANECA
Mención del cuerpo editorial	Existencia Consejo de Redacción y Comité Científico	Existencia Consejo de Redacción y Comité Científico
Contenido científico	Identificación miembros de los Comités	Identificación miembros de los Comités
Antigüedad mínima (1 año)	Instrucciones detalladas a los autores	Instrucciones detalladas a los autores
Identificación de los autores	Resumen	Resumen
Lugar de edición	Sumario (bilingüe)	Sumario (bilingüe)
Entidad editora	Sistema de arbitraje	Sistema de arbitraje
Mención del director	Datos estadísticos de la revista	Datos estadísticos de la revista
Mención de la dirección	Declara la periodicidad	Declara la periodicidad
Páginas de presentación	Cumple la periodicidad	Cumple la periodicidad
Mención de periodicidad	Evaluadores externos	Evaluadores externos
Tabla de contenidos (índice)	Anonimato en la revisión externa	Anonimato en la revisión externa
Membrete bibliográfico (inicio del artículo)	Comunicación motivada de la decisión editorial	Instrucciones a los evaluadores
Membrete bibliográfico (en cada página)	Apertura institucional del Comité Científico	Comunicación motivada de la decisión editorial
Miembros del Consejo Editorial	Internacionalidad del Comité Científico	Apertura institucional del Comité Científico
Afiliación institucional de los miembros del Consejo Editorial	Investigación original	Internacionalidad del Comité Científico
Afiliación de los autores	Apertura institucional de los autores (Entidad editora)	Apertura institucional del Consejo de Redacción
Recepción y aceptación de artículos	Incluida en WoS/JCR y/o ERIH	Investigación original
ISSN	Incluida en bases de datos especializadas	Apertura institucional de los autores
Definición de la revista	—	Incluida en WoS/JCR y/o ERIH
Sistema de arbitraje	—	Incluida en bases de datos especializadas + Catálogo Latindex

Latindex	CNEI	ANECA
Evaluadores externos	—	Incluida en ISOC, ICYT o IME
Autores externos	—	Incluida en DICE
Apertura editorial	—	—
Servicios de información	—	—
Cumplimiento de la periodicidad	—	—
Contenido original	—	—
Instrucciones a los autores	—	—
Elaboración de las referencias bibliográficas	—	—
Exigencia de originalidad	—	—
Resumen	—	—
Resumen en dos idiomas	—	—
Palabras clave	—	—
Palabras clave en dos idiomas	—	—

Esta forma de actuar ha tenido consecuencias en la vida, de por sí ya difícil, de las revistas de las sociedades de profesorado de matemáticas. Al profesorado de los departamentos de Didáctica de las Matemáticas le interesa publicar en revistas mejor posicionadas y deja de hacerlo en nuestras revistas. Pues aunque el trabajo sea de calidad no es valorado igual si está publicado en una revista u otra.

Aunque revistas como *Epsilon* o *Suma* aparezcan referenciadas en algunos índices como Latindex, Mathematics Education Database (MathEduc), CARHUS Plus+ 2014 o DIALNET, la característica general de nuestras revistas es que están dirigidas y editadas por profesorado que de forma altruista lo hace después de su jornada laboral. Evidentemente no podemos competir con algunas revistas que son editadas, con equipos profesionales, por editoriales comerciales.

DESEOS PARA EL FUTURO.

Este modo de actuar, considerar más importante el continente que el contenido, ha llevado a que una profesora se considerara agraviada por este tipo de evaluación que no tiene en cuenta la calidad de los trabajos sino de la revista que los publica, y llevará el caso hasta el Tribunal Supremo, en concreto a la Sala de lo Contencioso-Administrativo. Sección Cuarta que en su sentencia núm. 986/2018 reconoce algo tan decisivo como:

...las investigaciones, las aportaciones presentadas por los interesados, no pueden dejar de examinarse sólo por el hecho de que no se publicaran en las revistas o medios incluidos en los índices o listados identificados en la resolución de 26 de noviembre de 2014. Ni tampoco están excluidos por esa sola razón de la máxima valoración permitida por la Orden de 2 de diciembre de 1994. Dependerá de su contenido la evaluación que merezcan. Y a ello han de referirse el comité de expertos o los especialistas en los informes que emitan al respecto y en los que se fundamente la decisión de la Comisión Nacional de Evaluación de la Actividad Investigadora.

Esperamos que esta importante decisión haga que nuestras revistas puedan seguir publicando trabajos relevantes para nuestra área, de los que realmente influyen en el día a día de nuestras aulas y que sean evaluados de acuerdo a su calidad y no por dónde han sido publicados.

Otro componente importante, muy importante. Decisiva para la pervivencia de nuestras sociedades y por ende de nuestras revistas es el necesario relevo generacional. Pero esto es algo que nos preocupa desde hace tiempo, por eso Florencio Villarroya, presidente de la FESPM, en el Editorial de *Suma 20* ya la señalaba que:

Ahora, a finales de 1995, se pone en marcha una reforma que, con sus luces y sus sombras, lleva implícita algunas de las ideas que entonces empezaban a tomar cuerpo. Es un momento en el que no está todo hecho, en el que los profesores de matemáticas tenemos mucho que decir y aportar, tanto desde la crítica a los nuevos currículos, como a través de propuestas para la mejora de la enseñanza de algún aspecto de las matemáticas, o en la realización de materiales para la clase, etc. Estas aportaciones no las pueden llevar a cabo sólo aquella generación de hace veinte años. Es imprescindible que esta «nueva generación» de profesores que tienen veintitantos o treinta años se incorpore con ganas a esta tarea de seguir cambiando la enseñanza de nuestra materia, a seguir innovando, a tratar de seguir mejorando...

Es necesario que estos nuevos profesores y profesoras se incorporen a las juntas directivas de las sociedades de profesores, a los equipos que ponen en marcha las olimpiadas, a la organización de jornadas...; que se animen a presentar ponencias y comunicaciones en congresos, jornadas y encuentros; que comuniquen sus experiencias, que escriban artículos en revistas...

Con ello no abogamos por un relevo generacional, sino por una integración de profesores de diferentes edades y experiencia en una tarea que supone, además de la participación en un movimiento colectivo que impulsa la mejora de la calidad de la enseñanza de nuestra materia, un gran enriquecimiento profesional y personal.

Esta aspiración, que continua plenamente vigente, explicita la necesidad de la incorporación de las nuevas generaciones de profesorado al mundo de la innovación, investigación... y de que no lo haga de forma aislada sino a través de los foros existentes y cada vez más extendidos por todo el Estado y aglutinados en FESPM (en su expresión de las JAEM, *Suma*, Olimpiadas...).

REFERENCIAS

- Bracho-López, R., Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N., Adamuz-Povedano, N., Gutiérrez-Arenas, P. y Torralbo-Rodríguez, M. (2010). La investigación en Educación Matemática en la revista Epsilon. Análisis cuantitativo y temático (2000-2009). *Epsilon - Revista de Educación Matemática*, (75), 9-25.

- Bracho-López, R., Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N., Adamuz-Povedano, N., Gutiérrez-Arenas, P., y Torralbo-Rodríguez, M. (2011). Análisis cuantitativo y temático de la revista SUMA (1999-2010). *Suma*, (68), 47-54.
- González, J. (2018). Sexenios de investigación. *Global Politics and Law*. Recuperado de: <https://www.globalpoliticsandlaw.com/2018/07/24/sexenios-de-investigacion/>
- Monzó, O.(2013). “ Suma”: 25 años de una idea. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (74), 17-26.
- Rico, L., y Sierra, M. (1994). Educación matemática en la España del siglo XX. *Kilpatrick, J., Rico, L. y Sierra, M. Educación Matemática e Investigación*. (92-207) Madrid: Síntesis.

Cien números en la historia de la revista *Épsilon*

M^a Teresa González Astudillo

Universidad de Salamanca

maite@usal.es

Resumen: *Con éste, alcanzamos el número 100 de la revista Epsilon. Desde su creación en el año 1983 esta revista ha sufrido diversos avatares y ha evolucionado hasta el momento actual. Pretendemos con este artículo rendir un homenaje a todos los que han contribuido en su publicación, diseño y difusión: autores, editores, directores, revisores, lectores y diseñadores. Otras revistas como esta se han ido configurando como un medio de comunicación y expresión de todos los profesores de matemáticas. Muchos de nosotros hemos crecido y evolucionado profesionalmente al mismo tiempo que ellas. Valgan estas cien palabras como un reconocimiento a todas ellas.*

Palabras clave: *revista, matemáticas, prensa pedagógica, historia de la educación matemática*

One hundred as the numbers of the review *Epsilon*

Abstract: *With this, we reached number 100 of the Epsilon review. Since its creation in 1983 this review has suffered for different avatars and has evolved until the present time. With this article we try to pay a tribute to all those who have contributed to its publication, design and dissemination: authors, editors, directors, reviewers, readers and designers. Other magazines like this have been configured as a means of communication and expression of all teachers of mathematics. Many of us have grown and evolved professionally at the same time as them. These words are worthy of recognition to all of them.*

Keywords: *review, mathematics, pedagogical press, history of mathematics education*

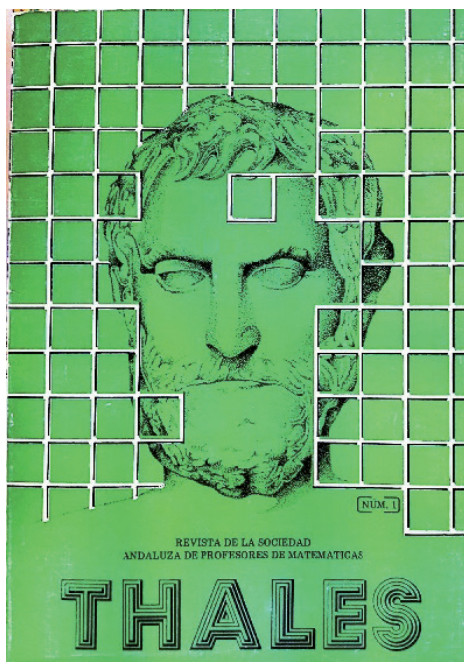


Figura 1. Número 1 de la revista de la revista de la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas.

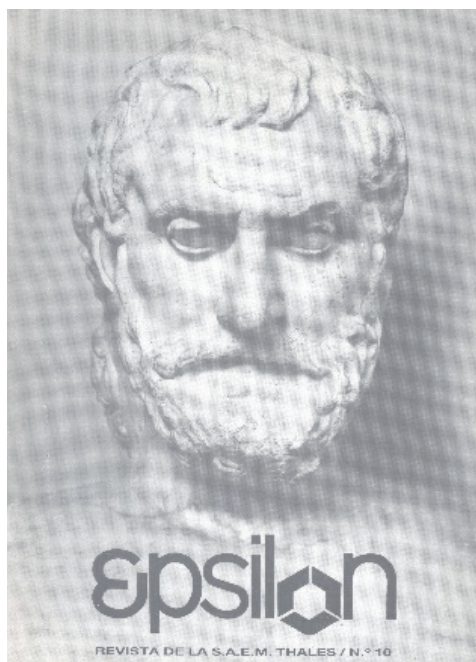


Figura 2. Número 10 de la revista *Épsilon*.

INTRODUCCIÓN

En febrero de 1984 nace la Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía (APMA) y con ella la revista *Epsilon*. Rico (2013) recuerda los fines principales de esta publicación y hace un repaso del primer número de dicha revista para conmemorar los 30 años de la revista.

Al año siguiente, en 1985, nace también la revista de la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas Thales (SAEM-THALES) como un medio de hacer visible el trabajo de los profesores de matemáticas, para compartir ideas y experiencias y servir como medio de comunicación de las noticias de la sociedad y de intercambio de estudios e investigaciones.

Se inició su andadura con número que incluía dos colaboraciones dedicadas al profesor Pedro Puig Adam como un homenaje a su figura por ser “uno de los pioneros de los estudios sobre enseñanza de la Matemática en España” (Iglesias, 1984, p.7).

Posteriormente, en el año 1988, al publicar el número 10 de la revista *Epsilon*, se fusionan ambas sociedades andaluzas manteniendo como nombre el de la Sociedad SAEM-THALES y siendo el de la revista, *Epsilon*, por ser la más antigua (Sánchez, 1988). Se inicia así una segunda etapa de la revista, más global por representar las producciones de todos los profesores andaluces de matemáticas. Esta fusión de ambas sociedades coincidió, además con el inicio de la Federación de Sociedades de Profesores

de Matemáticas que englobaba a todas las sociedades existentes hasta el momento y a la que se fueron incorporando sociedades emergentes, tratando de buscar cooperación y de trabajar por intereses comunes.

Es precisamente esta comunidad de profesores de matemáticas que llevaba tiempo organizándose en sociedades regionales y trabajando en grupos colaborativos, la que con su impulso consiguió que salieran adelante diversas publicaciones a lo largo de la geografía española. Así surgen revistas como *Números*, la decana de las revistas, editada por la Sociedad Canaria de Profesores de matemáticas Isaac Newton que ya llega actualmente al número 98 y cuyo primer número se publicó en 1981; la revista *Suma* editada por la Federación de Sociedades de profesores de matemáticas, que nace en octubre de 1988 y que actualmente alcanza el número 88 o *Uno*, revista publicada por la editorial Grao que nace en julio de 1994 y que acaba de publicar el número 82.

Además del movimiento asociativo que se generó en España en aquellos años, hay que recordar que el 1 de septiembre de 1983 se publicó en el BOE, la ley de Reforma Universitaria (LRU) (MEC, 1983) que organizaría las universidades y estructuraría la investigación y la docencia en departamentos. Fue en ese momento cuando se establecieron las áreas de conocimiento que conforman los departamentos de las universidades: art.8.2 “Los Departamentos se constituirán por áreas de conocimiento científico, técnico o artístico, y agruparán a todos los docentes e investigadores cuyas especialidades se correspondan con tales áreas”. Concretamente, en el Real Decreto 1888/84 de 26 de septiembre (MEC, 1984) se estableció un Catálogo de Áreas de Conocimiento para la universidad española y es cuando se considera que surge el área de conocimiento de Didáctica de la Matemática como un reconocimiento a la labor realizada por la comunidad de profesores de matemáticas (Rico, Sierra y Castro, 2002).

LA PRENSA PEDAGÓGICA

Dado que estas revistas se consideran dentro de lo que se ha dado en llamar prensa pedagógica, trataré de mostrar una visión general de esta temática para aterrizar posteriormente en las revistas que nos ocupan.

Se considera que ya durante la Ilustración aparecen papeles impresos relacionados con la educación en primer lugar de los artesanos y posteriormente de los ciudadanos y donde se tratan algunos problemas de la educación y de las instituciones educativas en general. Pero es en el siglo XIX cuando, con motivo de las primeras leyes que regulan la educación, como la Ley Moyano de 1857, empiezan a publicarse en España las primeras revistas en las que se da cuenta de las reformas legislativas en educación, de algunos métodos de innovación didáctica, se debaten ideas y concepciones acerca de la enseñanza en general, se hace publicidad de materiales y recursos didácticos o se publican convocatorias de diversa índole relacionadas con el mundo educativo.

Así se editaron diversas revistas que estaban ligadas a la labor de maestros de primaria y profesores de secundaria, en las que encontraban informaciones diversas sobre el ejercicio de su profesión, se publicaban informaciones sobre la normativa que regía la vida profesional de maestros y profesores de secundaria, pero también ideas para apoyar su trabajo docente para, de esta forma, compartir ideas y experiencias

comunes. Estas eran revistas de índole general, no centradas en una materia concreta ni incluso un nivel educativo. Cabe recordar revistas como *El magisterio español* (iniciada en 1868 y que llegaría a publicarse hasta muy avanzado el siglo XX) que acompañó a los maestros durante un largo periodo de tiempo o el *Boletín de la Instrucción Pública de Enseñanza* (1876-1936) más encauzado hacia los profesores de educación secundaria.

Una segunda época, desde el punto de vista histórico de la andadura de la prensa pedagógica, fue la que se corresponde a la dictadura (1936-1975). En ese momento la prensa se convierte en una forma de transmisión del ideario del nacional catolicismo del que no escapó la educación. Dentro de esta línea estaría la revista *Escuela Española* publicada desde 1941. Ya a partir de 1958, el CEDODEP (Centro de Documentación y Orientación Didáctica de la Enseñanza Primaria) publica la revista *Vida Escolar* en la que se constata una apuesta del Ministerio de Educación por la Innovación Docente en general y en la que se pueden encontrar diversos artículos, incluso monográficos dedicados a la enseñanza de las matemáticas (González, 2008). Hay que recordar que por aquella época se produce la reforma de la matemática moderna que tantos disgustos dio a maestros, padres y alumnos. En esta revista se publicaron diversos artículos con pautas, ideas, materiales, experiencias para acercar la matemática moderna a los maestros y profesores de secundaria.

En el siguiente periodo, correspondiente a la transición, desde la publicación de la Ley General de Educación (1970) hasta la reforma realizada por el PSOE en 1983 con la Ley de Organización General del Sistema Educativo (LOGSE) corresponde una descentralización de la enseñanza que pasa a ser competencia de algunas Comunidades Autónomas. Se inician en este momento muchos grupos de profesores localizados en diferentes zonas geográficas y ligados a los movimientos de renovación pedagógica que tratan de actualizar y renovar la enseñanza. Para publicar las experiencias de algunos de estos grupos surgen revistas como *Perspectiva Escolar* publicada por el grupo de Rosa Sensat o *Cuadernos de Pedagogía* que tuvieron una gran influencia en la escuela española tanto en el nivel de primaria como en el de secundaria. Estas revistas sirvieron de medio para focalizar la innovación docente, como medio de expresión de muchos maestros y profesores y como instrumento de formación docente.

Actualmente se puede constatar que se ha producido un boom de revistas de diversa índole apareciendo revistas especializadas en las diversas áreas de conocimiento y dirigidas a los profesores de la enseñanza universitaria. Hay que tener en cuenta que estamos en la era de la información y la comunicación y que hay una necesidad de difundir experiencias y noticias de actualidad cada vez mayor. Además, han surgido numerosas revistas científicas en las que divulgar los resultados de investigación de los profesores dedicados a la educación matemática. Este último grupo de revistas está más ligado a la cultura universitaria de competición y rankings “en la que vale más el dónde se publica que el qué se publica” (Hernández, 2018b, p. 31)

Dos características propias de la prensa pedagógica son que es una prensa de y para los profesores. Es de los profesores porque buena parte de la prensa pedagógica profesional está escrita y gestionada por los implicados, que en su mayoría son profesores de secundaria y universidad. Es para los profesores porque recoge sus preocupaciones e intereses (Hernández, 2018a), sus experiencias, sus propuestas, sus ideas.

Como hemos visto esta prensa, en el sentido más amplio, ha ido evolucionando a lo largo del tiempo y adaptándose a cada momento y circunstancia en la que estaba inmersa la educación teniendo una seña de identidad característica. Pero además, si observamos cada una de las revistas, veremos que no se configuran en una imagen fija pues van evolucionando siguiendo el ritmo de las reformas escolares lo que se percibe de forma inmediata en su estructura, en el tipo de artículos, en el número de autores firmantes de los artículos y su procedencia y en el propio formato físico de las revistas que en muchas ocasiones ha pasado del formato físico al formato digital, como ha sido el caso de la revista *Epsilon*.

LAS REVISTAS DIRIGIDAS A LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Entre las revistas de difusión dirigidas a los profesores de matemáticas (Rico, Sierra y Castro, 2002) tenemos las publicadas por diferentes sociedades de profesores de matemáticas (Números, Epsilon, Boletín de la Sociedad Puig Adam, Suma, Cuadrante, Unión), otras están publicadas por instituciones educativas (Sigma, Educación matemática, EMA) y otras están publicadas por editoriales comerciales (UNO). Además de artículos de difusión, estas revistas suelen incluir también artículos de investigación, anuncios de congresos y reuniones regionales y nacionales, materiales, reseñas de libros. Incluso en alguna ocasión suelen tratar un tema monográfico en profundidad.

El origen de estas revistas se ha gestado a través de las diferentes sociedades o grupos de profesores, con intereses comunes y con un afán de innovar y de trabajar para la mejora de la enseñanza de las matemáticas. Esto se ha llevado a cabo la mayoría de las veces de forma altruista, pero con un gran sentido de servicio a todos los implicados en la educación matemática, tanto profesores como alumnos, instituciones o agentes educativos en general.

Profesores como Julio Rey Pastor, Pedro Puig Adam o Luís Santaló crearon la semilla de una inquietud por introducir métodos innovadores en la enseñanza de las matemáticas preocupándose por la forma en la que los niños y jóvenes aprenden las matemáticas para adaptar la enseñanza y crear nuevos materiales que hicieran más atractivo el trabajo en las aulas. Los grupos de renovación pedagógica que nacieron en los años sesenta y setenta cogieron aquel testigo inicial haciendo un esfuerzo titánico pero ilusionante para transformar la enseñanza, creando materiales, libros de texto y didácticos tanto para alumnos como para profesores. Estos grupos se transformaron poco a poco en sociedades de profesores entre las que podemos encontrar a las pioneras como los grupos Cero y Zero, de Valencia y Barcelona respectivamente o la Sociedad Canaria de profesores de Matemáticas Isaac Newton. De esta forma surgieron las revistas que se han mencionado como medio de difusión de los trabajos realizados por estos grupos de profesores o como medio de comunicación y de intercambio de noticias de interés para los profesores de matemáticas. Este empuje inicial fue consolidándose poco a poco y contagiando a otros profesores de otras regiones que fueron constituyéndose en asociaciones y creando nuevas revistas y publicaciones.

Como ejemplo de una de estas revistas, la publicada por la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) es la que aglutina a todas las sociedades y a los profesores de matemáticas.

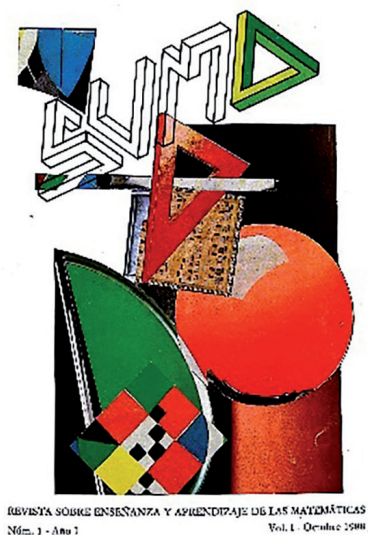


Figura 3. Número 1 de la revista *Suma*.

Se daban informaciones relativas a congresos tanto nacionales como internacionales, así en el primer número se da la información sobre el 6^o ICME que se celebró en Budapest en 1988, el I CIBEM que se organizaría en Sevilla, o el III Congreso internacional sobre la didáctica de las ciencias y de las matemáticas que se celebraría en Santiago de Compostela en 1989. También se proporciona información sobre exposiciones y libros publicados en forma de reseñas y sobre las olimpiadas Thales. Finalmente se incluyen las normas y el procedimiento para la publicación de originales en la revista.

Entre los autores del primer número de la revista *Suma*, todos los nombres son conocidos por su trayectoria solvente ya que han mantenido un trabajo continuado formando generaciones de profesores no sólo a través de su labor profesional sino a través de los artículos publicados en estas revistas. Tal es el caso de Francisco Hernán, Claudi Alsina, Ceferino Ruíz, Salvador Guerrero, José del Río, Manuel Fernández Reyes, Luís Rico o Florencio Villaroya, que son los autores firmantes de este primer número.

En definitiva, con estas revistas se trataba de “mantenerle informado [al profesor] y para suscitar en él nuevas expectativas metodológicas, de debate político educativo o de impulso de su carrera científica (Hernández, 2018, p.12).

EL PRIMER NÚMERO DE LA REVISTA DE LA SAEM-THALES

Resulta interesante desde el punto de vista histórico la revisión de los artículos publicados en los primeros números de una publicación, como las que estamos tratando. La revisión de los diferentes números nos da pista de múltiples cuestiones relacionadas con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas del momento y que subyacen en

los contenidos de los artículos. Su lectura permite conocer prácticas de las sociedades de aquel momento, intereses de profesores y alumnos, materiales que se usaban en las aulas que podían ser más o menos novedosos, lo que se consideraba innovador en una determinada época, el tipo de publicaciones que se realizaban, además de conocer quiénes eran los profesores protagonistas o más conocidos del momento, algunos hechos históricos, la legislación o las actividades más importantes realizadas en el ámbito educativo.

Para hacernos una idea de lo que se publicaba en este tipo de revistas en sus inicios vamos a hacer una pequeña descripción del primer número de la revista de la SAPM-THALES (el primer número de la revista *Epsilon* ya fue descrito por el profesor Rico en esta misma revista en el año 2013). Estaba dividido en siete apartados: colaboraciones, estudios matemáticos, didáctica, metodología y experiencias, informática, actualidad, matemáticas recreativas y problemas junto con una sección dedicada a bibliografía y una última para las bases de la I Olimpiada Thales.

Como hemos indicado al inicio de este artículo, las colaboraciones estuvieron dedicadas a la figura del Dr. Pedro Puig Adam en un homenaje a su legado a los veinticinco años de su fallecimiento (el 12 de enero de 1960). En este sentido se publicaron dos artículos. El primero de José R. Pascual Ibarra, catedrático de Instituto, titulado “Pedro Puig Adam, Maestro”. En él se recuerda la metodología usada por el profesor Pedro Puig Adam, su didáctica activa y heurística centrada en el alumno, algunos aspectos de su obra y publicaciones y la proyección internacional de su figura a través de su relación con Caleb Gattegno y su pertenencia a la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza de la Matemática.

El segundo de A. de Castro Brzezcki, catedrático de Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Sevilla y se titula “Reflexiones sobre la obra de Pedro Puig Adam”. En él se hace un repaso de algunas obras de Pedro Puig Adam como “La matemática y su enseñanza actual”, “Metodología y Didáctica de la Matemática Elemental”, “Geometría métrica”, “Cálculo Integral” y “Ecuaciones diferenciales” resaltando las principales contribuciones realizadas a través de estos libros. También se mencionan algunos artículos cuya temática principal eran las fracciones continuas.

Entre los estudios matemáticos se publica un artículo que se puede considerar una revisión histórica realizada por el catedrático de Instituto Antonio Malet Tomás sobre “Pedro Núñez, Simon Stevin y el cálculo del M.C.D. de Polinomios (1585)”. En él se hace un repaso del algoritmo de Euclides para el cálculo del M.C.D. de dos números, así como de la vida y obra del matemático belga Simon Stevin (1548-1620) que menciona al matemático portugués Pedro Núñez (1502-1578) a la hora de desarrollar el algoritmo para el cálculo del M.C.D. de dos polinomios, aunque el portugués “sólo había conseguido algunos métodos por tanteo” (Malet, 1984, p.32).

Otro artículo, de un carácter más marcadamente matemático, es el de Maurice Glayman, de la Universidad de Lyon. En él se presenta el desarrollo matemático de una función en un punto con sus definiciones y teoremas, se le da sentido a la derivada de una función en un punto a partir de su desarrollo, se explica el método de Horner (1786-1827) para factorizar una función polinómica y el método de Fermat (1601-1665) para calcular extremos de una función.

Se publicaron tres artículos sobre didáctica, metodología y experiencias. El primero de Carlos Maza Gómez, profesor de Matemáticas de la Escuela Universitaria de Profesorado de E.G.B. de Sevilla, se titulaba “La formación de conjuntos en Jean Piaget”. Hemos de recordar que, hasta aquel momento, la ley educativa en España (LGE) centraba la enseñanza de las matemáticas bajo los principios de la llamada Matemática Moderna. La matemática estaba organizada en torno a la noción de estructura, y la teoría de conjuntos tenía un papel principal en la organización de los contenidos. En este artículo, se recurre a un material muy conocido y utilizado para la enseñanza en las primeras edades como eran los bloques lógicos. Se describen en el artículo actividades para la introducción del concepto de conjunto y se introducen algunos términos con una intencionalidad claramente didáctica y propios de la matemática moderna: definir por comprensión o por extensión, pertenencia inclusiva o partitiva, relación infralógica o coordinación de semejanzas.

El siguiente artículo es una propuesta de ocho autores de la Sociedad Thales sobre “Metodología para el aprendizaje de las situaciones problemáticas con las operaciones fundamentales en E.G.B.” en el que se trata el asunto de las dificultades de los alumnos para resolver los problemas de matemáticas de sumas y restas. Se trata de una pequeña investigación en la que se analizan 150 problemas propuestos por niños de 1º de E.G.B. y se realizan algunas propuestas metodológicas para adaptar los problemas que se proponen a los niños a su nivel. Así, consideran que hay que tener cuidado con el lenguaje usado para que los alumnos lo comprendan, que los problemas partan de la propia realidad, que se utilicen cantidades pequeñas, que los primeros problemas sean de un único paso o que se empiecen resolviendo problemas con material concreto hasta llegar a resolverlos utilizando sólo el lenguaje y datos numéricos.

M^a Dolores Hernández Hernández y Juan Sánchez Ballesteros, ambos profesores de un Instituto de la provincia de Jaen proponen un artículo sobre “Posibilidades didácticas que ofrece el empleo de la calculadora”. En él se discute acerca del uso de la calculadora tanto en las clases de Matemáticas como en las de Física y Química, así como las posturas a favor y en contra existentes en el momento, aunque se pueden considerar de plena actualidad. Se plantean dos usos de la calculadora: “uno meramente funcional como auxiliar de trabajo y otro más revolucionario como elemento pedagógico, plenamente integrado en el aprendizaje” (Hernández y Sánchez, 1984, p. 61). El primero se utiliza fundamentalmente para comprobar los resultados de las operaciones realizadas con lápiz y papel y el segundo más innovador en el que se pretende que la calculadora sea una herramienta que facilite el aprendizaje del alumno. Finalmente se proponen dos ejemplos de esta segunda opción: el primero para comparar progresiones aritméticas y geométricas, así como para determinar la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica y el segundo para presentar a los alumnos las gráficas de las funciones trigonométricas.

Sorprendentemente hay una sección dedicada a la informática y que está conformada por dos artículos. El primero se titula “Algunas consideraciones sobre la enseñanza de la informática en el nivel medio” y está firmado por Manuel González Ávila del Instituto Asta Regia de Jerez de la Frontera y Juan Antonio Herrera Ejarque del Instituto Barrio Bellavista de Sevilla. En él se plantea la enseñanza de la informática que estaba ligada a las matemáticas para trabajar la noción de algoritmo. Se considera que la informática debería ser una herramienta que deberían utilizar todos los profesores, no sólo los de

matemáticas ni siquiera los de ciencias. En el otro artículo sobre “Una introducción a la inteligencia artificial” de Francisco García Morán, catedrático de Instituto, se menciona algunos aspectos que se consideran relacionados con la inteligencia artificial como los programas de procesamiento de textos, los que juegan partidas de ajedrez o los de análisis de decisión. Esto, además, da pie a considerar qué se entiende por inteligencia y qué áreas están relacionadas con la inteligencia artificial:

- Visión por computador.
- Producción del habla.
- Reconocimiento de la voz.
- Pensamiento, razonamiento y resolución de problemas.
- Comprensión del lenguaje y traducción.

Figura 4. Áreas de la inteligencia artificial (Thales 1, p. 75).

En la sección de Actualidad se hace un informe acerca del ICME-5 celebrado en Adelaida (Australia) al que la Sociedad Thales mandó un delegado, Manuel González Dávila. Esto permitió conocer otras realidades educativas, traer a España y a los profesores de matemáticas las novedades del momento, las tendencias didácticas imperantes o los principales dilemas a los que se estaban enfrentando los profesores a nivel mundial. También se incluye en esta sección los objetivos de la 2^a etapa de E.G.B. que se estaban discutiendo en ese momento.

Dentro del apartado de matemáticas recreativas se incluye un artículo sobre el uso de los pentominós y un programita realizado con BASIC sobre la construcción de cualquier pentominó a escala triple usando nueve de ellos.

Como en muchas otras revistas de la época se incluían problemas propuestos y resueltos. Problemas de Oposiciones, de Olimpiadas, propuestos por los lectores o por el comité editorial. Se trata de una manera de interactuar con los lectores bien proponiéndoles problemas para que ellos los resuelvan, bien haciéndoles partícipes de la edición de la revista para que sugieran problemas al consejo editorial.

Hay un apartado de bibliografía en el que se incluyen títulos de libros, supuestamente recién publicados junto con un pequeño resumen a modo de recensión de cada publicación. Y finaliza la revista con un anuncio de la I Olimpiada Thales, las diferentes direcciones provinciales en cada una de las provincias andaluzas con el nombre de los presidentes y las normas para la publicación de artículos.

LOS NÚMEROS ACTUALES: UNA APUESTA POR LA MODERNIZACIÓN

Desde el año 2015 la revista *Epsilon* se publica digitalmente y es de acceso abierto con lo que se pueden consultar los últimos números a través de la página web <<http://thales.cica.es/epsilon/>>. Como podemos percibir en los diferentes números, la estética de la revista se ha ido adaptando a los tiempos. Se trata de una publicación en la que se ha dado paso al color y en el que tanto la tipografía como las imágenes, tablas y gráficos tienen una estética más actual.

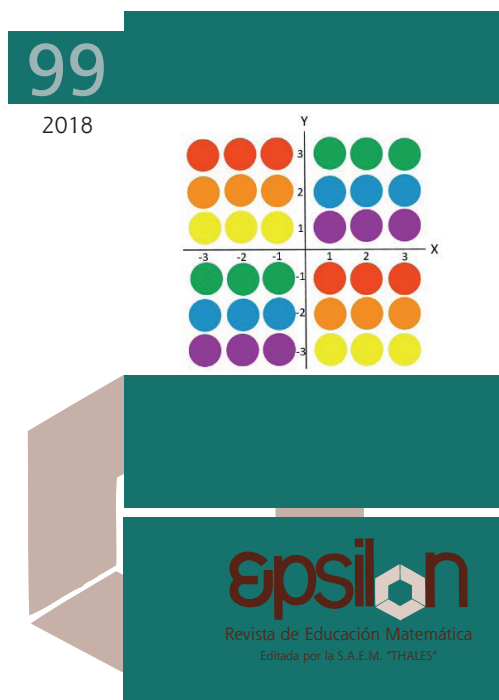


Figura 5. Último número de la revista *Epsilon*.

esos materiales en las aulas. Curiosamente el tangram sigue presente en los números más recientes de esta revista, de hecho, hay un artículo dedicado a este material en el número 99 de la revista *Epsilon*. Finalmente, termina la revista con una sección de miscelánea en la que se incluyen problemas resueltos y propuestos muchos de ellos recogidos a partir de la historia de las matemáticas, así como reseñas de libros que pueden ser interesantes no sólo desde el punto de vista de la enseñanza sino también que son de divulgación o dirigidos a los alumnos de secundaria.

Un aspecto curioso que ha surgido en la revisión de los últimos números de la revista es que muchos artículos los firman autores iberoamericanos. Esto puede ser producto de la facilidad de acceso a la revista a través de su página web, con lo que la distribución y el conocimiento por parte de profesores de matemáticas de la revista ya no es una cuestión regional, ni nacional, sino de índole más global. En este sentido de hacer que la revista esté dirigida a un público más amplio se puede observar cómo en los últimos números de la revista se escribe el título en español y en inglés además del resumen y las palabras clave. Esto también es un síntoma de uniformización de las revistas y de adaptación a los cánones establecidos en el mundo de las publicaciones científicas periódicas.

También se puede observar que los artículos muestran una gran variedad en relación con los temas o los niveles educativos a los que van dirigidos. Así sorprende que hay una gran cantidad de artículos centrados en la educación infantil y también hay que mencionar aquellos que están enfocados en torno a aspectos relativos a la estadística y la probabilidad así como a aspectos relacionados con la tecnología como el uso de un determinado software o el recurso a los videojuegos.

La estructura ha cambiado un poco, aunque todavía se pueden encontrar secciones comunes a la publicada inicialmente. La primera sección está dedicada a investigaciones, esto puede ser un síntoma o el resultado de que la investigación en Didáctica de la Matemática tiene ya un recorrido, se ha ido consolidando con el tiempo y, de hecho, han surgido revistas centradas en la difusión de los resultados de esta investigación. Otro apartado es el correspondiente a las experiencias que es común a todas las revistas dedicadas al profesor. En este sentido estas revistas se han mantenido fieles a sus orígenes tratando de facilitar a los profesores de matemáticas experiencias interesantes y novedosas que producen buen clima y buenos resultados en las aulas de los diferentes niveles educativos. La siguiente sección es la correspondiente a Ideas en las que se presentan materiales, así como tareas para el uso de

En esta última etapa, aunque en todos los números han aparecido contribuciones muy interesantes hay dos que voy a resaltar. Uno de ellos es el número 85 de la revista con el que se celebraron los treinta años de existencia y, con dicho motivo, en la parte de miscelánea se publicaron algunos artículos de homenaje. Uno de ellos del profesor Luis Rico en el que recordaba los inicios de la revista y otro del profesor Antonio Moreno en el que hacía un repaso de su labor como director de la revista.

Otro es el número 77 que se centró en la historia de las matemáticas y de la educación matemática y en el que participaron algunos especialistas españoles e iberoamericanos en esta temática como los profesores Bernardo Gómez, Modesto Sierra, Carmen López, Carlos Suárez Alemán, Luís Augusto Campistróus, Jorge López Fernández, Celia Rizo Cabrera, Javier Peralta, Miguel Picado, Luís Rico, Jesús Salinas, Natividad Adamuz Povedano, Noelia Jiménez Fanjul, Elisa Quirós Bajo, Constantino de la Fuente García, F. Damián Aranda Ballesteros, Manuel Gómez Lara y yo misma.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Aunque a lo largo de este escrito sólo se mencionan algunos de los autores de los artículos publicados en esta revista y en otras similares, quiero que sirva de homenaje a todos aquellos profesores que han contribuido a que esta revista (así como otras) se haya consolidado como un referente entre los profesores de matemáticas tanto españoles como iberoamericanos. Todos ellos, con su granito de arena han hecho posible que se llegara con éste al número 100 de la revista, lo cual es un hito. La labor desinteresada de cada uno de ellos y la ilusión por participar y hacer llegar al resto de la comunidad sus experiencias, trabajos e ideas han configurado una revista que a pesar de estar dirigida a la comunidad andaluza de profesores se ha transformado en una revista de ámbito internacional.

Es encomiable el trabajo realizado también por cada uno de los directores de la revista que han ido dejando su seña de identidad a lo largo de estos treinta y cinco años de recorrido. Su interés en que cada número saliera en el momento establecido, cerciorarse de la calidad de los artículos, que estuvieran representadas diferentes visiones de la matemática y su enseñanza así como sus diferentes ramas, que los artículos se adaptaran al momento en el que se encontraba la educación matemática ha sido el impulso que necesitaba la revista para llegar al momento actual. Todo ello ha supuesto un gran esfuerzo que quizá en estos momentos no tiene el reconocimiento que merecería porque muchos de nosotros estamos en cierta manera “obligados” a publicar en revistas de las llamadas de alto impacto. Pero creo que el esfuerzo de todos merece la pena porque se está cubriendo un ámbito que de otra manera quedaría totalmente huérfano.

En este sentido quiero terminar con unas palabras del actual director de la revista *Epsilon* en el momento en el que cogió el testigo para hacerse cargo de ella:

“Finalmente debo señalar que el éxito de la revista *Epsilon* depende no solo de los comités editorial y científico, sino de los autores y de cada una de las personas que, de forma desinteresada, realizan labores de arbitraje de los artículos o hacen sugerencias sobre la forma de mejoría. Sin todos ellos no podría existir la revista” (Maz, 2010, p.7)

REFERENCIAS

- González, M.T. (2008) La transición hacia la matemática moderna: La revista Vida Escolar. *Diálogo Educativo*, 8(25), 615-631.
- Hernández, J.M. (2018a) La prensa pedagógica compañera de viaje de los profesores. En J.M. Hernández (ed.) *La prensa pedagógica de los profesores* (pp. 11-14). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.
- Hernández, J.M. (2018b) La prensa pedagógica de los profesores en España. En J.M. Hernández (ed.) *La prensa pedagógica de los profesores* (pp. 17-32). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.
- Hernández, M.D. y Sánchez, J. (1984) Posibilidades didácticas que ofrece el empleo de la calculadora. *Revista de la Sociedad de Profesores de Matemáticas THALES*, 1, 59-64.
- Iglesias, M. (1984) Colaboraciones. *Revista de la Sociedad de Profesores de Matemáticas THALES*, 1, 7.
- Malet, A. (1984) Pedro Núñez, Simon Stevin y el cálculo del M.C.D. de Polinomios (1585). *Revista de la Sociedad de Profesores de Matemáticas THALES*, 1, 29-34.
- Maz, A. (2010) Editorial. *Epsilon*, 27(2), 7.
- MEC (1983). Ley Orgánica 11/1983, de 25 de agosto, de Reforma Universitaria.
- MEC (1984) Real Decreto 1888/1984, de 26 de septiembre, por el que se regulan los concursos para la provisión de plazas de los cuerpos docentes universitarios.
- Rico, L. (2013) Comienzo de la revista Epsilon. *Epsilon*, 30(3), 95-100.
- Rico, L. y Sierra, M. (2000) Didáctica de la matemática e investigación. En J. Carrillo y L. C. Contreras (Eds.), *Matemática española en los albores del siglo XX*, (pp. 77-131). Huelva: Hergué Editores.
- Rico, L., Sierra, M. y Castro, E. (2002) El área de conocimiento de Didáctica de la Matemática. *Revista de Educación*, 328, 35-58.
- Sánchez, G. (1988). Presentación. *Épsilon*, 10, 7.

El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en Probabilidad y Combinatoria

Antonio Francisco Roldán López de Hierro

Universidad de Granada

Carmen Batanero

Universidad de Granada

Pablo Beltrán-Pellicer

Universidad de Zaragoza e IES Valdespartera

Resumen: *Los diagramas de árbol permiten representar la estructura de muchos problemas combinatorios y probabilísticos, facilitando su resolución. No obstante, la investigación sobre el tema muestra la existencia de dificultades en la construcción e interpretación de diagramas de árbol por parte de los estudiantes, posiblemente debido a que en la enseñanza no reciben la atención necesaria. En este artículo analizamos las propiedades del diagrama de árbol y las dificultades experimentadas en el trabajo con los mismos descritas en la investigación previa. Finalmente mostramos ejemplos de las oportunidades de aprendizaje que ofrece en la combinatoria y probabilidad, incluyendo la argumentación de algunos teoremas. Como conclusión, sugerimos la necesidad de su uso, desde edades tempranas, para conformar intuiciones correctas que luego se aplicarán durante todo el periodo de formación en probabilidad y combinatoria.*

Palabras clave: *Diagrama de árbol, intuiciones, probabilidad, combinatoria.*

Tree diagram: an intuitive resource in probability and combinatorics

Abstract: *Tree diagrams allow representing the structure of many combinatorial and probabilistic problems, facilitating their resolution. However, research on this topic shows the existence of difficulties in the construction and interpretation of tree diagrams by students, possibly because they do not receive the necessary attention in teaching. In this work we analyze the properties of tree diagrams and the difficulties when working*

with them described in previous research. Finally, we show examples of learning opportunities offered in probability and combinatorics, including the understanding of some probability theorems. As a conclusion we suggest the need of using them from an early age in order to form correct intuitions that will then be applied throughout training in probability and combinatorics.

Keywords: *Tree diagram, intuitions, probability, combinatorics.*

1. INTRODUCCIÓN

Asumimos que la principal misión del sistema educativo es la formación integral de las personas para que éstas puedan desenvolverse como ciudadanos con plenos derechos en la sociedad del siglo XXI. Ellos se verán obligados a tomar decisiones que afectarán tanto a ellos mismos como, en muchos casos, al resto de la población. Para llevar a cabo esta labor, es absolutamente necesario que los estudiantes adquieran una serie de conocimientos y habilidades que les permitan afrontar, de una forma razonada y crítica, la toma de decisiones basadas en argumentos sólidos, lo más científicos posible y teniendo en cuenta el contexto en el que se toman.

En este sentido, el sistema educativo resalta la formación en aspectos lingüísticos y matemáticos como base fundamental para tener éxito en las demás áreas de conocimiento: comunicar, comprender y abstraer son competencias esenciales en la formación de los individuos. Nuestro interés se centra en este momento en las capacidades matemáticas que debemos adquirir para hacer frente a cuestiones de tipo social, cívico e incluso ético. La formación del ciudadano en matemáticas comienza incluso antes de que se matricule en el primer curso de Educación Primaria, pues no solo se trabajan contenidos matemáticos en la Educación Infantil, sino que las familias otorgan una gran importancia a que el niño comience a distinguir números y operaciones básicas (suma y resta) cuanto antes mejor. Desarrollar estas capacidades en la etapa más temprana es considerado símbolo de inteligencia y de un futuro próspero.

Durante la Educación Primaria, el alumnado aprende de una manera informal, dando significado a los contenidos matemáticos basándose especialmente en sus intuiciones. La enseñanza y el aprendizaje de los números y de la geometría están indisolublemente vinculados a las experiencias vividas por el alumnado, que le son cercanas y que puede repetir en su ambiente familiar. Con el paso de los cursos se va adquiriendo un mayor grado de profundización en los diferentes conceptos y procedimientos que otorgan al alumnado la capacidad de resolver situaciones problemáticas, especialmente si se corresponden con situaciones reales en contextos muy próximos.

El bloque curricular sobre Estadística y Probabilidad (MECD, 2015) está especialmente orientado a un aprendizaje mediante procedimientos heurísticos en los que la intuición es incluso más necesaria que las herramientas algebraicas. La habilidad para reconocer los fenómenos aleatorios y prever sus posibles resultados está más relacionada con las experiencias personales y con la capacidad lingüística de expresión que con contenidos puramente matemáticos. En este sentido, durante toda la etapa primaria se trabajan técnicas de enseñanza y aprendizaje que, a pesar de que puedan parecer básicas por su simplicidad, serán las que conformen después el razonamiento matemático y probabilístico en edades más avanzadas.

En el presente artículo desarrollamos un análisis de las posibilidades que ofrecen los diagramas de árbol dentro de la Educación Primaria y Secundaria para la formación del ciudadano, especialmente en el ámbito de la combinatoria y la probabilidad, y describiremos su importancia en la hora de aplicar, sin necesidad de fórmulas, teoremas notables de probabilidad (que luego aparecen en las pruebas de acceso y/o admisión a la universidad). Comenzamos con unas consideraciones generales y un resumen de la investigación didáctica relacionada.

2. EL DIAGRAMA DE ÁRBOL

El tipo de representación utilizado para resolver problemas influye en el modo en que se organiza e interpreta la información dada en el enunciado (Kolloffel, Eysink, de Jong y Wilhelm, 2009). El valor de la representación depende de su poder informacional y computacional; el primero se mide por la cantidad y tipo de información que permite representar y el segundo por la forma de ayudar a operar con la misma. En este sentido, los diagramas de árbol juegan un papel importante en la planificación y el desarrollo de tareas matemáticas escolares.

En general, un diagrama de árbol es un grafo (orientado o no) con la propiedad de que cualesquiera dos de sus distintos vértices están conectados por un único camino simple. Para fines educativos, nos basta con considerar diagramas de árbol con un número finito de vértices y lados, que siempre se pueden representar en el plano (véase la Figura 1).

En concreto, consideraremos diagramas de árbol que nacen de una *raíz* (o *tronco*) de la que salen diferentes caminos (en nuestro caso, un número finito de ellas), denominadas *ramas de primera generación*. Estas ramas deben representar todas las posibilidades que pueden aparecer en la primera fase de la construcción del diagrama (por ejemplo, de un juego o experimento que se trata de representar), y terminan en vértices del grafo denominados *nudos* (o *nodos*, o *vértices*). A su vez, de estos nudos pueden nacer nuevas ramas, denominadas *ramas de segunda generación*, que vuelven a terminar en nuevos nudos. Tras un número finito de fases, se llega a *nudos terminales*, de los que ya no salen más ramas, los cuales representan el final del fenómeno representado (pudiendo el árbol volver a repetirse desde la raíz).

La ventaja principal de los diagramas de árbol, que pueden usarse también fuera del ámbito matemático, es su capacidad para transmitir mucha información, ordenada y clasificada, con un simple *golpe de vista*. Por ello, permite una visión rápida y de conjunto del hecho estudiado, teniendo en cuenta todas sus posibilidades. Así, en la toma de decisiones, ayuda a discriminar las causas primarias o secundarias que afectan al comportamiento global del sistema, para analizar su posible evolución y elegir la mejor decisión. Igualmente, en la resolución de un

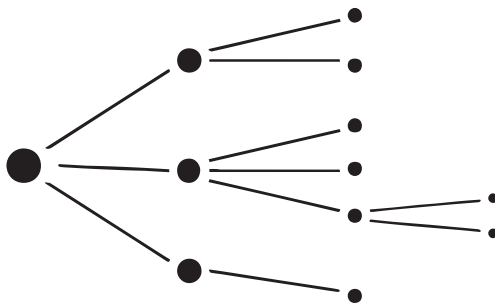


Figura 1. Ejemplo de diagrama de árbol.

problema, ayuda a todos los componentes del grupo de trabajo a entender cuál es su labor dentro del cometido global, colaborando en el desarrollo eficiente de la tarea.

En este trabajo mostraremos que, en la enseñanza de las matemáticas, los diagramas de árbol son especialmente útiles en el estudio de la combinatoria y de la probabilidad. Previamente resumimos algunas investigaciones didácticas centradas en el uso de este recurso.

3. INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA SOBRE EL DIAGRAMA DE ÁRBOL

Uno de los primeros autores que se preocupó por el diagrama de árbol fue Fischbein (1975), quien lo consideró como un recurso importante en la resolución de problemas de combinatoria. El autor sostuvo que las estructuras matemáticas pueden representarse no solo de forma simbólica, sino también icónica y enactiva, sin cambiar, por ello, las características esenciales de dicha estructura, y que el uso de métodos adecuados de representación facilita y acelera el tránsito desde un nivel de conocimiento hacia otro nivel superior. Entre las representaciones gráficas destaca el diagrama de árbol, al que Fischbein considera un modelo generativo, en cuanto que sugiere y facilita una generalización iterativa (problemas sucesivos con un mayor número de elementos cada vez) y una generalización constructiva (problemas derivados del inicial), siendo éstas las dos características esenciales del razonamiento recursivo.

Fischbein (1975) concibe las intuiciones como procesos cognitivos que intervienen directamente en las acciones de las personas y que suponen una parte importante de su inteligencia. Sus características de globalidad, inmediatez, facilidad aparente para ser aplicadas en otras situaciones, estructurabilidad y auto-evidencia las hacen difíciles de cambiar, una vez que se adquieren. Pero las intuiciones en matemáticas pueden ser correctas o incorrectas; de ahí la importancia de una formación matemática adecuada para educar las intuiciones que, tanto en el caso de la combinatoria como de la probabilidad, se pueden reforzar con la ayuda del diagrama de árbol.

La enseñanza no dedica demasiado tiempo al aprendizaje del diagrama de árbol. Es por eso que diferentes autores han descrito errores de los estudiantes. Por ejemplo, Batanero, Navarro-Pelayo y Godino (1997) indican que pocos estudiantes usan espontáneamente este diagrama para resolver problemas combinatorios, y los que lo usan cometen errores o lo interpretan incorrectamente. Roa (2001), en una investigación con estudiantes de matemática, encuentra algunos que dibujan diagramas en los que sobran o faltan ramas, o bien dibujan una parte del diagrama (por ejemplo una de las ramas) tratando luego de generalizar, pero fallan en la generalización o incluso construyen el diagrama solo como complemento, si bien resuelven el problema por medio de fórmulas.

Son muchas las dificultades que puede encontrar el alumnado al enfrentarse a la confección o a la interpretación de un diagrama de árbol: por ejemplo, no considerar una raíz, no describir todas las ramas que salen de cada nudo, creer que de cada nudo debe salir el mismo número de ramas, creer que el experimento siempre termina tras el mismo número de fases, suponer que todos los caminos en todos los experimentos ocurren con la misma asiduidad, no tomar la decisión adecuada en cada nudo sobre el mejor camino

a elegir, etc. Otro error, difícil de atajar, es la creencia de que los procesos han de seguir una línea temporal concreta, no teniendo sentido, por ejemplo, determinar la probabilidad de un suceso de la primera fase condicionando a que sabemos lo que ha ocurrido en la segunda etapa. Díaz y de la Fuente (2005) describen esta creencia y la posible influencia que tiene en los errores de los estudiantes al resolver problemas basados en el *teorema de Bayes*.

4. DIAGRAMAS DE ÁRBOL EN LOS DOCUMENTOS CURRICULARES

La importancia de los diagramas de árbol en el desarrollo de diferentes asignaturas a lo largo de las etapas de Educación Primaria y Secundaria se muestra en diferentes documentos curriculares. Dentro de la actual Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE), el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, que establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, los cita en el Bloque 5 dedicado a estadística y probabilidad (MECD, 2015). Los diagramas en árbol aparecen en diferentes cursos, tanto en los contenidos como en los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de la siguiente forma.

Dentro de los contenidos, los diagramas de árbol se consideran, por ejemplo, en 4º de ESO para las *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas*, donde identificamos: “Experiencias aleatorias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades”; “Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias” (p. 398). Por otro lado, en las *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas* de 4º de ESO encontramos: “Cálculo de probabilidades mediante la Regla de Laplace. Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes. Diagrama en árbol.” (p. 407).

Sin embargo, como criterios de evaluación, se consideran desde las *Matemáticas* de 1º y 2º de ESO, donde se incluye el siguiente: “Describe experimentos aleatorios sencillos y enumera todos los resultados posibles, apoyándose en tablas, recuentos o diagramas en árbol sencillos” (p. 413). En las *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas* de 3º encontramos: “Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Diagramas de árbol sencillos”; “Estimar la posibilidad de que ocurra un suceso asociado a un experimento aleatorio sencillo, calculando su probabilidad a partir de su frecuencia relativa, la *regla de Laplace* o los diagramas de árbol, identificando los elementos asociados al experimento” (p. 394). En la asignatura de *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales* de 2º de Bachillerato, aparecen como criterios de evaluación: “[...] utilizando la *regla de Laplace* en combinación con diferentes técnicas de recuento personales, diagramas de árbol o tablas de contingencia” (p. 389). En este curso, suponen uno de los principales recursos educativos en el área de probabilidad. Por ejemplo, veremos más adelante cómo usarlos en ejercicios y problemas en los que se aplica tanto el *teorema de la probabilidad total* como el *teorema de Bayes*, que luego son propuestos sistemáticamente cada año en las pruebas de acceso y/o admisión a la universidad.

Finalmente, en los estándares de aprendizaje evaluables también se incluyen desde el primer curso. Así en las *Matemáticas* de 1º y 2º de ESO, encontramos “Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos”, Igualmente se citan como estándares de aprendizaje evaluables en el área de Lengua Castellana y Literatura en los siguientes términos: “Aplica técnicas diversas para planificar sus escritos: esquemas, árboles, mapas conceptuales etc.” (p. 361). Los diagramas de árbol también están presentes en las pruebas de acceso a ciclos formativos, especialmente en la familia profesional de Administración y en la de Comercio y Marketing.

En lo que sigue analizamos algunos usos de este diagrama en combinatoria y probabilidad y, en especial, su utilidad para facilitar la comprensión de algunos teoremas notables de probabilidad. Finalizamos con algunas recomendaciones para la enseñanza.

5. DIAGRAMAS DE ÁRBOL EN COMBINATORIA

Aunque, aparentemente, el contenido combinatorio del currículo es limitado, esta impresión es falsa, pues la combinatoria es, en realidad, la base de la matemática discreta y aparece como tal, no solo en probabilidad, sino en aritmética (números factoriales, divisibilidad), muestreo, matrices, determinantes e incluso en investigación operativa (Hadar y Hadass, 1981).

Por ello, los diagramas de árbol se utilizan desde la Educación Primaria en temas relacionados con la enumeración sistemática o el cálculo del número de elementos de un conjunto discreto (sin contar), desde una componente lúdica, haciéndolos intervenir en actividades exploratorias y juegos, entendiendo éstos como un conjunto de acciones, sujetas a ciertas normas o reglas predeterminadas, que se realizan como diversión, pero pueden servir de recurso de aprendizaje. Precisamente Engel, Varga y Walser (1976) ya propusieron una serie de juegos, muchos de ellos basados en el diagrama de árbol, que permiten introducir la combinatoria desde esta etapa educativa.

Las primeras actividades combinatorias basadas en los diagramas de árbol en Educación Primaria son, quizás, aquellas diseñadas para aprender a clasificar objetos según unas cualidades determinadas. Por ejemplo, podemos distinguir entre hombres y mujeres que, a su vez, pueden tener el pelo moreno, castaño, rubio o pelirrojo. En este caso, un sencillo diagrama de árbol sirve para comprender todas las posibilidades de la clasificación, atendiendo a diferentes criterios (sexo y color de pelo), de tal forma que cada uno de los objetos considerados debe pertenecer a uno, y solo a uno, de los posibles caminos considerados desde la raíz hasta un nodo terminal. En otras palabras, la clasificación debe ser exhaustiva y excluyente.

En la Educación Secundaria, los diagramas de árbol se utilizan principalmente en ejercicios y problemas asociados a la construcción de permutaciones, variaciones y combinaciones, ordinarias o con repetición, elaboradas en base a las normas que se hayan prefijado, con la idea de remarcar la estructura multiplicativa de estas situaciones. Por otro lado, son muchos los ejemplos de actividades combinatorias accesibles al alumnado que permiten construir e interpretar diagramas de árbol durante toda su etapa escolar. Describimos algunos de ellos (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1994):

- Realizar una enumeración sistemática: detallar todas las posibilidades que pueden ocurrir al lanzar dos o tres monedas o dados, o explicar todas las posibilidades que nos podemos encontrar para el tiempo meteorológico para mañana y pasado mañana (cuando vamos a realizar una excursión).
- Analizar la mejor estrategia en un juego, como en el de *pares o nones*.
- Problema de existencia: ¿existe una forma de organizar una competición donde n equipos han de jugar dos contra dos?
- Problemas de optimización: determinar una forma rápida de ordenar un conjunto de números.

En resumen, los diagramas de árbol son esenciales en combinatoria, para comprender cómo han de combinarse una serie de elementos para formar una opción plausible. No obstante, a poco que el número de elementos aumente, suele haber tantas combinaciones (o variaciones) que el cálculo de todas las opciones posibles se dispara. Un ejemplo sencillo, que causa gran impacto entre el alumnado, es la descripción de todas las diferentes formas de vestir de los propios alumnos partiendo de la ropa de que disponen. Por ejemplo, si poseen 7 camisetas y 3 camisas para abrigar el tronco, 6 pantalones para las piernas, unos zapatos y dos calzados deportivos, nos estaríamos encontrando ante $(7 + 3) \cdot 6 \cdot (2 + 1) = 180$ posibilidades distintas de vestir, lo cual es suficiente para ir a clase todos los días durante un curso escolar sin repetir modelo. Todo ello sin contar ropa deportiva para hacer gimnasia, pañuelos, ropa interior, complementos, etc.

En estos casos no es necesario (sería muy engorroso) formar todo el diagrama de árbol. Una estrategia para resolver este problema de forma general consiste en afrontar previamente un caso en el que el número de posibilidades en cada etapa sea menor (no más de dos o tres), y representarlo gráficamente cuando sea asequible (por ejemplo, dibujar el diagrama de árbol para el caso de 3 camisas, 2 pantalones y 2 tipos de calzado). Utilizando este modelo simplificado, facilitamos que el alumnado descubra una fórmula que luego pueda emplearse variando el número de objetos a combinar e incluso variando el contexto, como ocurre en los ejemplos siguientes:

- Si tenemos papeletas con 5 nombres y 7 apellidos, ¿cuántos nombres pueden formarse? (distinguir entre si el nombre llevará uno o dos apellidos, o si se pueden repetir o no los apellidos).
- ¿Cuántos menús diferentes pueden confeccionarse con 5 primeros, 4 segundos y 7 postres?
- Si rifamos dos premios al azar entre todos los alumnos de la clase, ¿cuántas parejas ganadoras puede haber?

6. DIAGRAMAS DE ÁRBOL EN PROBABILIDAD

En el ámbito de la probabilidad, los diagramas de árbol son, sin lugar a duda, una herramienta destacada dentro los procesos de enseñanza y aprendizaje del alumnado. En primer lugar, se utilizan para determinar el espacio muestral, es decir, todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, siendo muy interesante en los experimentos

compuestos, que se pueden descomponer en varias fases y que ofrecen un número finito de posibilidades en cada paso.

Por otro lado, aunque a veces la propia construcción del diagrama de árbol ayuda a comprender la estructura del experimento y, por tanto, a resolver los problemas, su utilidad es aún mayor en el cálculo de probabilidades en el contexto de un experimento compuesto (véase Huerta, Edo, Amorós y Arnau, 2016). Por ejemplo, cuando se analizan experimentos aleatorios que ocurren en diferentes etapas de forma consecutiva, los diagramas de árbol nos ayudan a conocer todos los posibles resultados de cada etapa. En este caso, el diagrama suele considerarse *dirigido*, en el sentido de que hay una forma natural de recorrer el árbol, según vayan apareciendo unas u otras opciones en el experimento, lo que se suele indicar en la representación gráfica mediante flechas en vez de segmentos. Éste podría ser el caso si consideramos todas las posibles combinaciones de géneros de cuatro hermanos de la misma familia.

Para formar un diagrama de árbol, los sucesos que pueden ocurrir en la primera etapa de un experimento aleatorio deben formar un *sistema completo de sucesos*, es decir, describir el espacio muestral de forma exhaustiva y excluyente. Sus probabilidades asociadas son simples por contraposición a las probabilidades que se asocian a ramas secundarias, que son probabilidades de sucesos que pueden ocurrir en la segunda etapa condicionadas a sus respectivos sucesos de la primera fase. Dichas probabilidades se suelen escribir junto a las ramas (o flechas) del diagrama de árbol y, en muchas ocasiones, son fracciones que resultan de la aplicación de la *regla de Laplace*. La suma de las probabilidades de las ramas que salen de cada nudo debe ser 1 ya que representan todas las posibilidades de los sucesos que pueden ocurrir tras pasar por ese nudo en dirección a la siguiente fase (véase la figura 2).

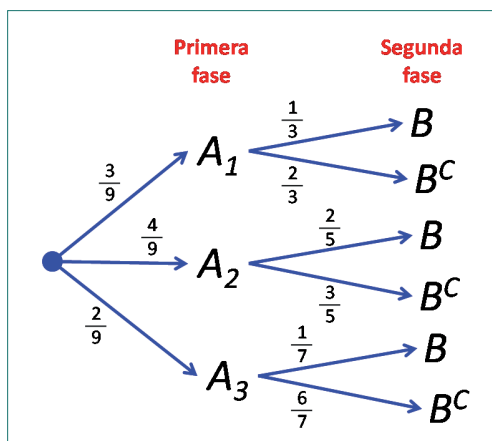


Figura 2. Diagrama de árbol con indicaciones de sus respectivas probabilidades.

En el diagrama de árbol anterior, el espacio muestral del primer experimento está formado por tres sucesos A_1 , A_2 y A_3 y en el segundo experimento por dos, B y su

complementario. A partir del diagrama, es sencillo calcular probabilidades condicionales como las siguientes.

$$P(B|A_1) = \frac{1}{3}, \quad P(B^c|A_2) = \frac{3}{5} \quad \text{y} \quad P(B|A_3) = \frac{1}{7}.$$

El suceso que ocurre como conjunción de un suceso de cada fase puede interpretarse como el camino simple que va desde la raíz hasta un nodo terminal pasando por todos los sucesos que conforman la trayectoria. Las probabilidades compuestas de dichos sucesos resultantes de intersecciones pueden ser determinadas multiplicando las respectivas probabilidades del camino que se recorre. Pluvinage (2005) indica que cuando el punto de llegada para una experiencia se toma en cuenta como el de partida para otra posterior, se habla de encadenamiento, donde se aplica la regla del producto. Por ejemplo:

$$P(A_1 \cap B^c) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}, \quad P(A_3 \cap B) = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{45}.$$

Los argumentos que apoyan esta regla, necesarios para dar significado al diagrama y relacionarlo con este desarrollo aritmético, están vinculados a su vez con el significado de la fracción como operador, especialmente cuando dicha fracción expresa una razón entre los casos de interés y los casos posibles (*regla de Laplace*). De esta forma, el ejemplo anterior podría leerse de la siguiente forma: «Si el suceso A_1 ocurre tres de cada nueve veces que repetimos la experiencia ($3/9$) y, habiendo ocurrido A_1 , el suceso B^c ocurre dos de cada tres veces ($2/3$), entonces en $2/3$ de $3/9$ de las ocasiones ocurre el suceso compuesto $A_1 \cap B^c$ ». Obviamente, desde el punto de vista didáctico, este argumento debe interpretarse aludiendo a los sucesos dentro del contexto del problema, dejando la notación formal para los últimos cursos.

El diagrama mostrado en la Figura 2 se puede continuar añadiendo nuevos experimentos. Por ello, una de las principales ventajas del diagrama de árbol es su carácter recursivo: para construir un árbol de n pasos, basta ampliar el construido con $n - 1$ etapas, y éste parte del de $n - 2$, hasta llegar al nodo original.

Pero la principal bondad de los diagramas de árbol es su enorme capacidad para hacer comprender a quienes los diseñan o interpretan situaciones relativamente complejas de una forma muy sencilla. Por ejemplo, cuando nos hacemos una prueba médica para detectar si tenemos o no una cierta enfermedad, confiamos en que el proceso de detección será fiable al 100%. Sin embargo, esto no es así. Podemos estar sanos y que la prueba diga que tenemos la enfermedad (falsos *positivos*), o podemos estar enfermos y que el test asegure que estamos sanos (falsos *negativos*). En cualquier caso, las pruebas médicas deben incrementar, cada vez más, su *sensibilidad* (probabilidad de dar positivo cuando el paciente tiene la enfermedad) y su *especificidad* (probabilidad de dar negativo cuando el paciente está sano). Esta situación se muestra en la Figura 3.

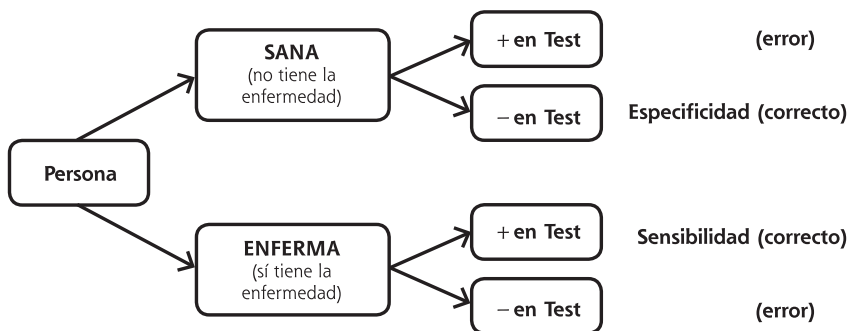


Figura 3: Diagrama de árbol para describir los posibles casos al hacernos una prueba médica.

7. TEOREMAS NOTABLES DE PROBABILIDAD UTILIZANDO DIAGRAMAS DE ÁRBOL

Si consideramos experimentos con un número pequeño de sucesos en el espacio muestral, es posible utilizar el diagrama de árbol para introducir a los estudiantes en el estudio de teoremas que, de otro modo, serían complejos de justificar. Así, tanto el *teorema de la probabilidad total* como el *teorema de Bayes* permiten una interpretación muy sencilla cuando se ha confeccionado un diagrama de árbol (Martín-Pliego y Ruiz-Maya, 2010).

De esta forma, un diagrama de árbol con dos fases (como el de la Figura 2) nos ayuda a interpretar el *teorema de la probabilidad total* como una herramienta adecuada para calcular la probabilidad de un suceso de la segunda fase, sin hacer mención a lo que pudo ocurrir en la primera. De esta forma, solo hay que recorrer todos los caminos que llevan a ese suceso, y sumar los respectivos productos de las probabilidades que se encuentran en dichos caminos. Por ejemplo, a partir de la Figura 4, podemos calcular la probabilidad del suceso B resaltando todos los caminos que llevan a dicho suceso (véase la Figura 4). Por consiguiente, la probabilidad del suceso B se obtiene haciendo el siguiente cálculo:

$$P(B) = \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{9} + \frac{8}{45} + \frac{2}{63} = \frac{101}{315}.$$

Cuando el alumnado es capaz de comprender este sencillo e intuitivo método, relacionando el significado de cada uno de los sumandos con las correspondientes ramas del árbol y su significado dentro del contexto, resulta más sencillo que, más adelante, sea capaz de generalizar este resultado de manera formal, con la conocida expresión:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3),$$

la cual, posteriormente, se puede generalizar todavía más empleando cualquier número de sucesos en cada etapa y variando las probabilidades que intervienen.

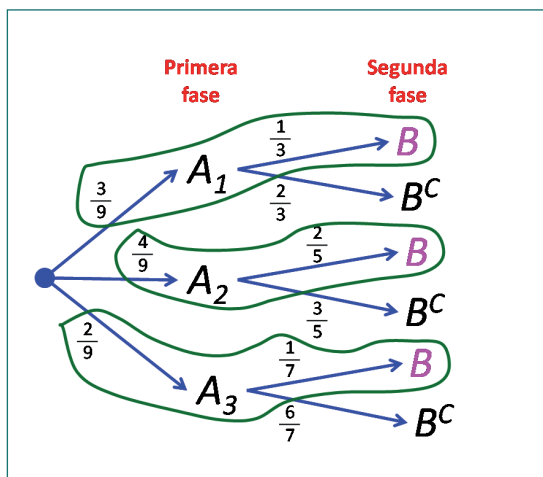


Figura 4. Diagrama de árbol resaltando los caminos que llegan al suceso.

El *teorema de Bayes* puede resultar un poco extraño a primera vista, ya que en él se nos solicita calcular la probabilidad de un suceso que pudo ocurrir en la primera fase del experimento cuando sabemos lo que ha ocurrido en la segunda fase. Esto choca con la intuición inicial de los estudiantes, pues asocian el condicionamiento de sucesos con la causalidad y, además, suponen que no puede condicionarse un suceso a otro que ocurre con posterioridad (Díaz y de la Fuente, 2005). Matemáticamente, sin embargo, el orden temporal es irrelevante para el condicionamiento pero, intuitivamente, hay diferencia en la comprensión, aspecto que es el origen de diversos sesgos de razonamiento.

Así, en el *teorema de Bayes* sabemos lo que ocurrió en la segunda fase, pero desconocemos lo que ocurrió en la primera y, por ello, nos planteamos calcular la probabilidad de que ocurriese ese suceso con la información disponible. Pongamos como ejemplo que tenemos fiebre, pero no sabemos si la causa es gripe u otra enfermedad. Aquí, las probabilidades que nos interesa conocer son del tipo:

$$P(A_i|B),$$

es decir, ¿qué probabilidad tengo de tener gripe si tengo fiebre? Para ello, hay que conocer las probabilidades $P(A_i)$ que se denominan, en este contexto, *probabilidades a priori*, y las condicionales $P(B|A_i)$, que se denominan *verosimilitudes* de que ocurra el suceso B sabiendo que ha ocurrido el suceso A_i . Las probabilidades $P(A_i|B)$ se denominan *probabilidades a posteriori*. Para obtenerlas, el *teorema de Bayes* puede interpretarse, intuitivamente, de la siguiente forma, calculando el siguiente cociente:

- En el denominador se escribirá la probabilidad del suceso B (al que se condiciona), obteniéndolo como en el *teorema de la probabilidad total* (buscando todos los caminos que llevan al suceso B de la segunda fase y sumando todos los productos de verosimilitudes y probabilidades a priori);

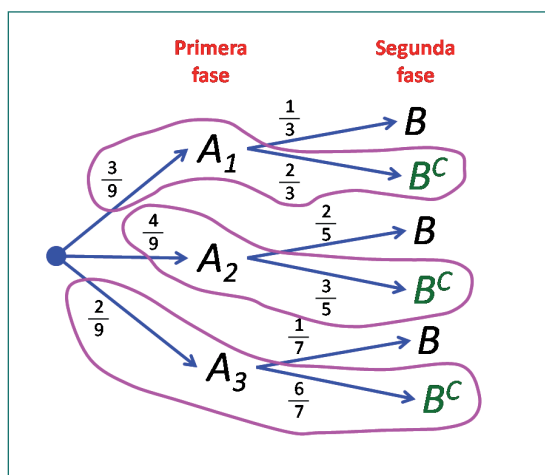


Figura 5. Diagrama de árbol que facilita la aplicación del teorema de Bayes.

- En el numerador se escribirá el único sumando del denominador que corresponde, a la vez, a los dos sucesos considerados (uno de la primera fase y otro de la segunda).

Por ejemplo, utilizando el árbol de la Figura 5, la probabilidad de que haya ocurrido el suceso A_2 , condicionando al suceso B^c , se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 P(A_2|B^c) &= \frac{\text{único camino que pasa por } A_2 \text{ y } B^c}{\text{suma de todos los caminos que llevan a } B^c} \\
 &= \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{3}{9} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{9} \cdot \frac{6}{7}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{2}{9} + \frac{4}{15} + \frac{4}{21}} = \frac{4}{15} \cdot \frac{214}{315} = \frac{42}{107}.
 \end{aligned}$$

Es importante resaltar que en el denominador se escriben todos los caminos que lleguen a B^c , mientras que en el numerador se considera un único camino de los que hay en el denominador. Toda vez que el alumnado ha comprendido este proceso, muy probablemente sea capaz de comprender su justificación teórica del teorema y, también, su expresión algebraica, a saber:

$$\begin{aligned}
 P(A_2|B^C) &= \frac{P(A_2) \cdot P(B^C|A_2)}{P(A_1) \cdot P(B^C|A_1) + P(A_2) \cdot P(B^C|A_2) + P(A_3) \cdot P(B^C|A_3)} \\
 &= \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{3}{9} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{9} \cdot \frac{6}{7}} = \dots = \frac{42}{107}.
 \end{aligned}$$

Concluimos este estudio aportando una nueva perspectiva desde la cual se puede introducir al alumnado en el estudio de los teoremas de la *probabilidad total* y de *Bayes*. Consideremos un contexto adecuado para aplicar el *teorema de Bayes*, como puede ser el descrito en la Figura 2. En la primera fase del experimento solo pueden ocurrir, de forma excluyente, los sucesos A_1 , A_2 y A_3 , mientras que en la segunda etapa estamos considerando el suceso B y su complementario. Como hemos comentado antes, en estas condiciones, las probabilidades iniciales $P(A_i)$ se denominan *probabilidades a priori*, mientras que las probabilidades $P(B|A_i)$ y $P(B^C|A_i)$ de los sucesos de la segunda fase condicionadas a sus respectivos sucesos de la primera fase se denominan *verosimilitudes*. Teniendo en cuenta el contexto en el que nos encontramos, es interesante plantear al alumnado la existencia del árbol “inverso” del árbol considerado en la Figura 2: en este árbol “inverso”, los sucesos de la segunda fase del diagrama de árbol original se corresponden con los sucesos de la primera fase del diagrama de árbol “inverso”, y viceversa (véase la Figura 6).

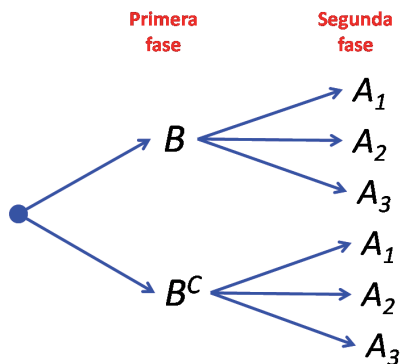


Figura 6. Diagrama de árbol “inverso” del diagrama de la Figura 2.

De esta forma, si deseamos completar el árbol “inverso” con sus respectivas probabilidades, podemos interpretar que el *teorema de la probabilidad total* nos permite calcular las *probabilidades a priori* $P(B)$ y $P(B^C)$ del árbol “inverso”, mientras que el *teorema de Bayes* es la herramienta más adecuada para determinar las *verosimilitudes* $P(A_i|B^C)$ del árbol “inverso”. Utilizando este nuevo punto de vista, podemos contrarrestar el sesgo

que produce la línea temporal en el alumnado, observando que cada árbol como el de la Figura 2 posee un árbol “inverso” asociado.

CONCLUSIONES

Las principales ventajas de los diagramas de árbol pueden resumirse en tres características esenciales: provocan un gran impacto visual en la persona que los observa, describen de una forma sintética y estructurada el fenómeno al que se refieren, y permiten ir de lo abstracto a lo particular atendiendo a los factores que influyen en el proceso.

En resumen, los diagramas de árbol constituyen una de las principales herramientas de representación y de deducción en el ámbito de la probabilidad y de la combinatoria. El alumnado aprende a confeccionarlos e interpretarlos mediante la propia experimentación, y los procesos intuitivos que desarrolle en las edades más tempranas servirán, durante toda su vida, para razonar y argumentar en contextos que se presten a ser analizados mediante diagramas de árbol. Es por ello que, en nuestra opinión, debería incrementarse el tiempo dedicado en clase al planteamiento de situaciones problemáticas que puedan afrontarse mediante diferentes técnicas de resolución, siendo una de las posibles el diagrama de árbol. Esto permitiría al alumnado contrastar las bondades y las deficiencias de los diagramas de árbol frente a otros procedimientos de resolución.

Para evitar que la aplicación de los diagramas de árbol se reduzca a un mero procedimiento, es necesario incidir en los argumentos que permiten elaborar para justificar las operaciones a realizar, facilitando la dotación de significado a los términos de las expresiones aritméticas para el cálculo de la probabilidad en relación con el contexto. De esta manera, se aumenta la idoneidad didáctica o grado de adecuación del proceso de enseñanza y aprendizaje (Beltrán-Pellicer, Godino y Giacomone, 2018).

Actualmente, el alumnado no aprende a confeccionar o a interpretar diagramas de árbol mediante la aplicación de técnicas sistemáticas de enseñanza y aprendizaje, sino mediante heurísticos que va contrastando a través de su propia experiencia. En este sentido, es muy importante que el docente ofrezca al alumnado suficientes oportunidades de aprendizaje para que, después, este último sea capaz de desenvolverse con soltura a la hora de analizar las diferentes posibilidades de un experimento y sus respectivas probabilidades. A nuestro entender, las capacidades adquiridas por el alumnado en sus edades más tempranas para diseñar e interpretar diagramas de árbol serán las que luego ponga en juego el resto de su vida. En este sentido, las intuiciones que se hayan adquirido durante la Educación Primaria serán cruciales durante el resto de la formación. Es más, como hemos puesto de manifiesto, estas intuiciones son suficientes, en muchos casos, para superar con éxito las pruebas de acceso a la universidad sin necesidad de aplicar complicadas fórmulas.

Agradecimientos

Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupos de Investigación FQM-126, FQM-268 (Junta de Andalucía) y S36_17D (Diputación General de Aragón).

REFERENCIAS

- Batanero, C., Godino, J.D. y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.
- Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. y Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32(2), 181-199.
- Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D. y Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 32(61), 526-548.
- Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, 59, 245-260.
- Engel, A., Varga, T. y Walser, W. (1976). *Hasard ou strategie: jeux de combinatoire, de probabilités et de statistiques*. OCDL-Office Central de Librairie.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Hadar, N. y Hadass, R. (1981). The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. *Educational Studies in Mathematics*, 12(4), 435-443.
- Huerta, M., I. Edo., P., Amorós, R. y Arnau, J. (2016). Un esquema de codificación para el análisis de las resoluciones de los problemas de probabilidad condicional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 19(3), 335-362.
- Kolloffel, B., Eysink, T. H., de Jong, T. y Wilhelm, P. (2009). The effects of representational format on learning combinatorics from an interactive computer simulation. *Instructional Science*, 37(6), 503-517.
- Martín-Pliego, F.J. y Ruiz-Maya, L. (2010). *Fundamentos de probabilidad* (2ª ed.). Madrid: Paraninfo.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). *Real decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor
- Pluvillage, F. (2005). Árboles de transiciones etiquetadas en cálculo de probabilidades. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(1), 91-99.
- Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Trasladando la geometría de la pintura abstracta al geoplano

Manuel Gómez Campos

Teresa F. Blanco

Valeria González Roel

Universidad de Santiago de Compostela

Resumen: *En este artículo se presenta un proyecto de intervención multidisciplinar para los niños de segundo de Educación Primaria. Se parte de obras de Piet Mondrian y Paul Klee para analizar los conceptos geométricos presentes en las obras, trasladándolos después al geoplano. Las dificultades se centran en las relaciones entre rectas y en la visualización de elementos de la circunferencia. El geoplano facilitó la atención a la diversidad y la consolidación y visualización de conceptos geométricos que luego incorporaron a sus creaciones artísticas. Se recurrió a la tecnología para hacer visible todo el proceso llevado a cabo.*

Palabras Clave: *STEAM, geometría plana, pintura abstracta, geoplano y visualización.*

Moving geometry from abstract painting to geoboard

Abstract: *In this article, we present a multidisciplinary intervention project for students in the second year of Primary Education. This project begins with works by Piet Mondrian and Paul Klee in order to analyse the geometric concepts present in the paintings, which are later moved to the geoboard. The difficulties are centred on the relationships between straight lines and on the visualization of elements of the circumference. The geoboard facilitated attention to the diversity, and to the consolidation and visualization of geometric concepts that were later incorporated into their artistic creations. Technology was used to make the entire process carried out visible.*

Keywords: *STEAM, plane geometry, abstract painting, geoboard and visualization.*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, la sociedad ha experimentado notables cambios en el ámbito cultural y artístico en los que son destacables, por ejemplo, el impacto del arte moderno en la ciudadanía o la aparición de nuevas corrientes y formas de expresión artísticas. Estos cambios repercuten en el sistema educativo, en el cual se promueven nuevos métodos de trabajo interdisciplinar que se traducen en propuestas didácticas que potencian las áreas STEAM (en inglés, Science, Technology, Engineering, Art, and Mathematics) dentro del aula (Gorgal, Blanco, Salgado y Diego, 2017). En este sentido, se destaca la valiosa oportunidad que ofrece la materia de Educación Plástica y Visual para interactuar con las demás materias del currículo de Educación Primaria, en particular con las Matemáticas (Frega, 2007 e Iglesias, 2017).

Siguiendo el Decreto 105 (MEC, 2014), las áreas de Educación Artística y Matemáticas están estrechamente relacionadas a través de las competencias. Se destaca que uno de los objetivos fundamentales es potenciar un enfoque globalizador e interdisciplinario que fomente la transversalidad de contenidos entre estas áreas. Concretamente, en el bloque 3 de la materia Educación Plástica y Visual, se señala la importancia de la competencia matemática para desenvolver, de forma gráfica y artística, los contenidos aprendidos en la materia de Matemáticas.

El objetivo principal de esta propuesta es conectar la Geometría y la Educación Plástica y Visual utilizando el geoplano como recurso manipulativo. Como objetivo específico desde la Geometría está identificar las ideas previas de los niños acerca de contenidos básicos como: tipos de líneas, polígonos y su clasificación, círculo y circunferencia y ángulos. Desde la Educación Plástica y Visual, el objetivo es introducir a los niños en la interpretación de obras artísticas para que hagan juicios de valor, expresen sus sentimientos y formulen hipótesis del tipo: ¿Para qué crees que sirve ver este tipo de obras en la clase de matemáticas? o ¿En qué piensas cuando miras la obra? Se intentó que los niños mostraran interés y motivación por investigar los trazos más importantes relativos a la vida de los pintores Mondrian y Klee y las características de sus obras que están estrechamente relacionadas con la Geometría. Se requirió, por último, que estos utilizaran diferentes representaciones y expresiones artísticas; y que se iniciaran en la construcción de propuestas visuales y audiovisuales por medio de las TIC.

METODOLOGÍA

La metodología se centró en la participación activa, favoreciendo tanto el pensamiento racional y crítico como el trabajo individual y cooperativo del alumnado (Echeita, 2006). Del mismo modo, se abogó por una metodología en la que la manipulación de los materiales se considera elemento fundamental en la construcción de la Geometría (Iglesias, 2017).

La propuesta se implementó en un grupo de segundo de Educación Primaria, formado por 13 niñas y 14 niños, en el horario correspondiente a la materia Educación Plástica y Visual. Se presentaron tres actividades inspiradas en obras de los pintores Piet Mondrian y Paul Klee, relacionadas con los conocimientos adquiridos en las clases de geometría:

líneas, tipos de líneas, polígonos, ángulos, vértices, círculos y circunferencias. La secuencia metodológica en las dos primeras actividades se inició presentando una obra de cada uno de los autores e indagando sobre los conocimientos previos a través de una puesta en común. A continuación se explicaron y repasaron los contenidos geométricos asociados a dicha obra y se experimentó con el geoplano para evaluar la adquisición y asentamiento de tales contenidos. Para finalizar, la última actividad fue la que dio pie al proceso de creación donde los niños tuvieron que realizar su propia obra artística y explicarla a los demás compañeros. Según Renzulli y Reis (1997) todo proceso creativo es esencial que sea transmitido a una audiencia real después de abordar el nivel más hondo de construcción de conocimiento.

Para la elaboración de las actividades se recurrió al modelo de Van Hiele (Godino y Ruiz, 2002). El nivel en el que se encuentran los niños a los que va destinada esta propuesta de intervención es el nivel 0, siendo las actividades que se le proponen para iniciarlos en el 1. Para recoger y afianzar los conceptos surgidos en la puesta en común y explicados después por el profesor se utilizó el geoplano como recurso manipulativo (Alsina et al., 1991; Badillo e Edo, 2007; López, 2010; Mariño, 2000). Este material permite que los niños exploren un número grande de figuras a nivel concreto, adiestren la coordinación muscular fina y que observen una figura desde muchas posiciones, evitando errores asociados a las figuras y a una posición determinada. Así mismo, fomenta la creatividad con el juego libre y la composición y descomposición de figuras, desarrollando la reversibilidad del pensamiento haciendo transformaciones de figuras y volviendo al original.

Se construyeron tres geoplanos de 80x40 cm (dos de trama cuadrada y uno doble circular), lo que permitió trabajar en grupos de cuatro componentes y facilitó la construcción de un número importante de figuras geométricas sin superponer. A todos ellos se les aplicó una cámara cenital para ser proyectados en el encerado digital y, así, hacer partícipes a los demás compañeros cuando un grupo de niños y niñas salía a representar figuras o una composición.

El proceso de descripción y análisis de una producción plástica se hizo siguiendo las tres fases que proponen Badillo y Edo (2007). En la *fase inicial* se hace una descripción objetiva de los elementos que se reconocen en la obra y que forman parte del vocabulario geométrico y plástico de cada actividad. En la *segunda fase* se realiza una mirada subjetiva propia de los niños, haciéndoles preguntas como: ¿qué puede ser? ¿qué me sugiere? ¿a qué me recuerda? En la *tercera y última fase* los niños han de ponerle título a la obra y explicar a los demás esa elección del título. A continuación, se describen cada una de las actividades de la propuesta (imagen 1).

Actividad 1

Piet Mondrian y las líneas poligonales

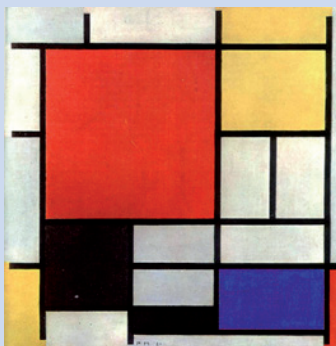


Imagen 1. Composición en rojo, amarillo, azul y negro (1921).

Esta actividad se comenzó mostrando en la pizarra digital una obra del pintor Piet Mondrian titulada 'Composición en rojo, amarillo, azul y negro' (Imagen 1). Esta obra está compuesta por líneas poligonales cerradas formando cuadriláteros de distintos tamaños, con trazos gruesos y pintadas de distintos colores. En esta sesión, los niños, de forma oral, destacaron los rasgos más característicos de la obra y datos curiosos del autor. Después, el maestro hizo un repaso de los conceptos geométricos estudiados en el curso anterior y los nuevos introducidos en este curso (Imagen 2). La fuerza de esta actividad recayó en la construcción del concepto de polígono a partir del concepto de línea poligonal cerrada y sobre el trabajo manipulativo que ayuda a los niños a construir gradualmente este concepto. A continuación, los niños representaron en el geoplano los distintos tipos de líneas y las relaciones entre ellas. Al igual que Dickson, Brown y Gibson (1991) recogen en su investigación, algunos niños presentaban dificultades para reconocer la relación de paralelismo de dos rectas, por ejemplo, cuando una es más larga que otra (rectas D y C en la Imagen 3), o si están situadas oblicuamente (rectas A y B en Imagen 3). A continuación, se presentaron las líneas poligonales abiertas (Imagen 4) y cerradas (Imagen 5) con múltiples ejemplos y también contraejemplos para mitigar las dificultades y posibles errores, tal y como aconsejan Romero y Cañadas (2015).

Una vez introducidos estos conceptos se procedió a identificar, comparar y clasificar figuras planas, empezando por los triángulos (Imagen 6) y siguiendo por los cuadriláteros (Imagen 7). La visualización de cuadrados y triángulos en posiciones no estándar produjo algunas dificultades en los niños que se solventaron cambiándose de posición o girando el geoplano.

También se presentaron contraejemplos para fortalecer el concepto de triángulo y de cuadrilátero. En la imagen 8 se muestra un sector circular como contraejemplo de triángulo y, en la imagen 9, una figura parecida a un rectángulo con dos de sus lados opuestos semicirculares. El geoplano permite realizar los cambios pertinentes para poder formar el polígono correcto, como se puede observar en las imágenes 10 y 11 (Evangelista, Pereira y Souza, 2011).

Para finalizar esta actividad se introdujo a los niños en la medida, para lo cual se les indicó que construyeran un rectángulo de unas determinadas dimensiones (Imagen 12). En la imagen 13 se muestra a un niño explicando el número de cuadraditos unidad que están contenidos en otro más grande.



Imagen 2. El maestro repasa conceptos.

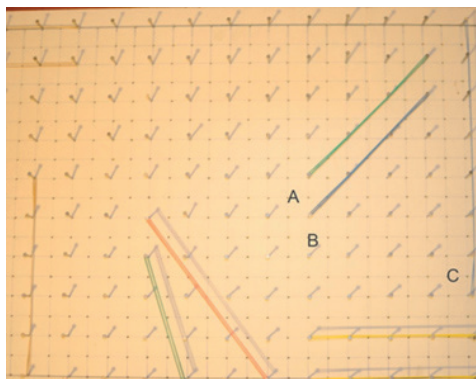


Imagen 3. Representaciones de relaciones de rectas.

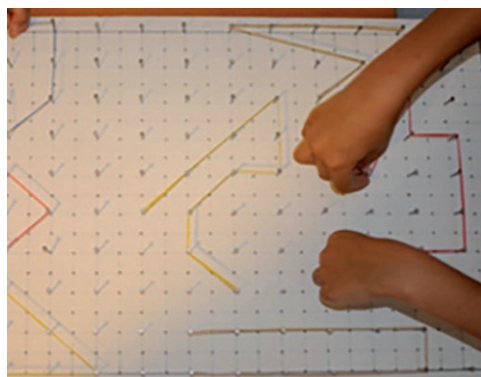


Imagen 4. Líneas poligonales abiertas.

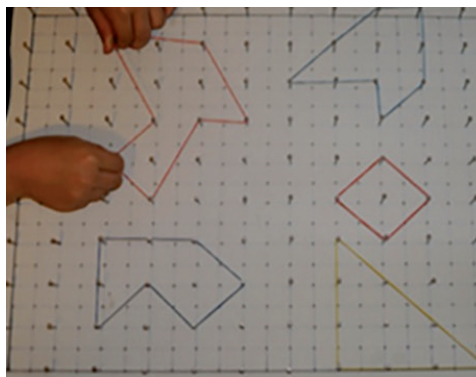


Imagen 5. Líneas poligonales cerradas.

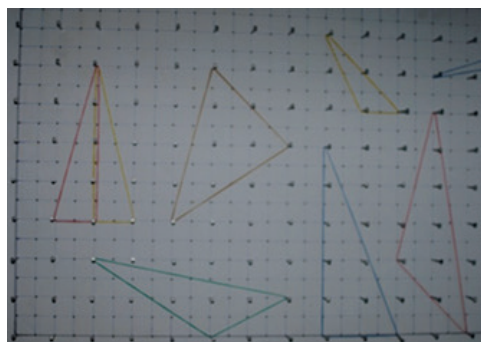


Imagen 6. Triángulos isósceles y escalenos.

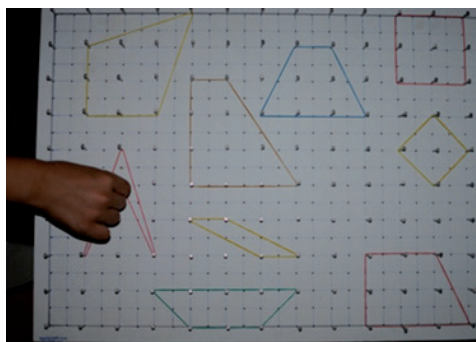


Imagen 7. Trapecios, cometas, puntas de flecha y cuadrados.



Imagen 8. Esta figura no es un triángulo.

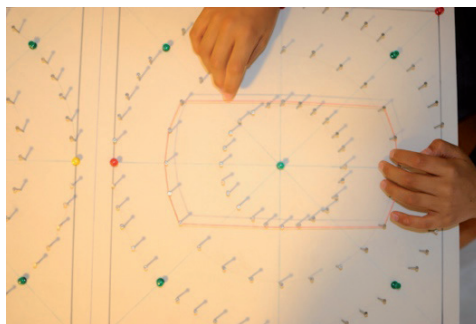


Imagen 9. Esta figura no es un rectángulo.



Imagen 10. Modificación por manipulación de las gomas de la figura de la imagen 8 convirtiéndola en un triángulo.

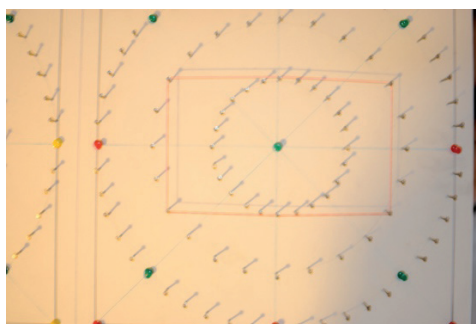


Imagen 11. Modificación por manipulación de las gomas de la figura de la imagen 9 convirtiéndola en un rectángulo.

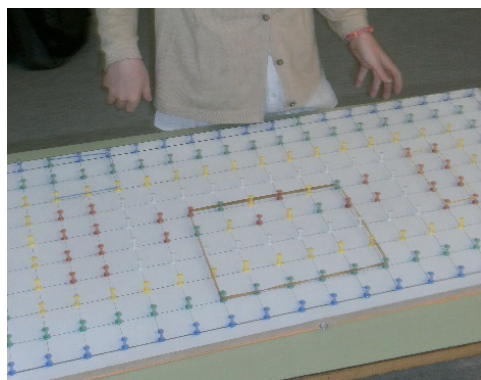


Imagen 12. Rectángulo de 5x4.

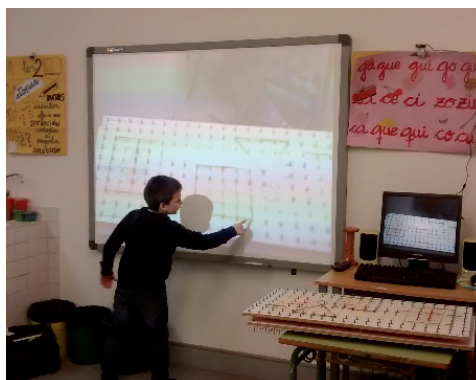


Imagen 13. Contando nº de cuadrados contenidos en uno de mayor tamaño.

Actividad 2 Paul Klee y los círculos



Imagen 14. Senecio (1922)

En esta actividad los niños se inspiraron con la obra *Senecio* de Paul Klee (Imagen 14). Esta actividad comenzó de forma muy similar a la anterior. Se procedió a la descripción de la obra identificando los elementos geométricos que hay en ella y comentando datos curiosos del autor. Atendiendo a la variación de respuestas y comentarios sobre esta, se realizó una puesta en común de los conceptos geométricos que se reconocen en ella. Se partió del trabajo previo sobre los conceptos de línea curva y poligonal trabajados en la actividad 1. Una vez reconocido el círculo, la circunferencia y las demás figuras geométricas que hay en la pintura, los niños fueron pasando por parejas al geoplano circular y realizando las figuras geométricas observadas en la pintura. Se introdujeron, en ese momento, nuevos términos geométricos como radio, diámetro, ángulo, cuerda, arco y circunferencias concéntricas para que empiecen a forma parte de su vocabulario (nivel 0 de Van Hiele). Las imágenes 15, 16 y 17 presentan algunos de esos conceptos representados por los niños en el geoplano. En la imagen 18 se muestra una de las creaciones libres en las que los niños tenían que incorporar figuras geométricas vistas en las actividades anteriores (fase de integración del modelo de Van Hiele).



Imagen 15. Diámetro y circunferencias concéntricas.



Imagen 16. Circunferencia con dos diámetros.

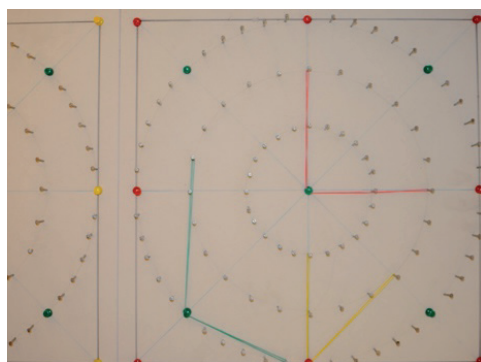


Imagen 17. Construyendo ángulos.



Imagen 18. Creando un sol.

Actividad 3 Creando arte a partir de Piet Mondrian



Imagen 19. Aurora

Esta actividad tuvo como meta fomentar en los niños procesos de reflexión sobre la construcción de una producción artística que relacionasen el arte y la geometría como son la argumentación matemática, la expresión verbal y la imaginación y la creatividad. En la realización de las obras, cada niño utilizó una técnica que consideró más adecuada: acrílica, ceras, rotuladores, acuarelas o combinación de ellas. Las únicas indicaciones fueron que las obras que se realizasen contuvieran formas geométricas de las comentadas en clase. Alguna de las obras pretendió emular a la original (Imágenes 19 y 20), en cambio otras, como las imágenes 22, 23 y 24, tienen un mayor grado de creatividad al interpretar libremente la obra, aunque siempre manteniendo las premisas marcadas en cuanto a los conceptos geométricos.

A medida que los niños fueron acabando sus obras las fotografiaron y las compartieron con los demás compañeros y familiares subiéndolas a la aplicación *Prezi* (Imagen 24). Cada uno explicó a sus compañeros el significado de su obra, las figuras geométricas que en ella aparecen y el porqué del título.

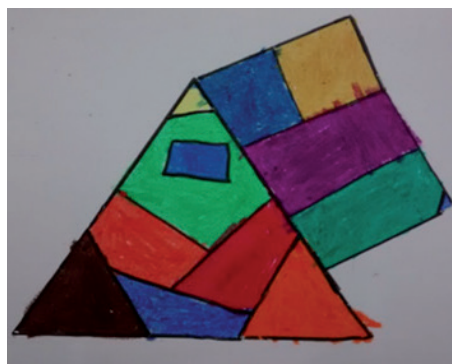


Imagen 20. Eva.



Imagen 21. Laura.



Imagen 22. Mateo.



Imagen 23. Matías.



Imagen 24. Presentación en línea con *Prezi* con las 24 obras abstractas de los niños del CEIP Raíña Fabiola.

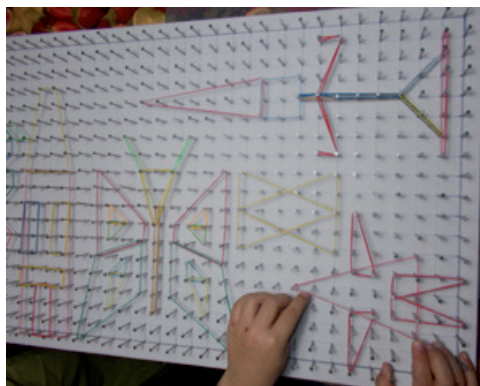


Imagen 25. Simetrías.



Imagen 26. Mateo navegando.

Para finalizar, los niños crearon composiciones libres realizando figuras simétricas de motivos variados (Imagen 25) y otros reprodujeron escenas próximas a la realidad (Imagen 26).

EVALUACIÓN

El proceso de evaluación fue dividido en tres momentos: (1) una evaluación inicial en la cual se utilizó un “warm-up” para tener nociones de los conocimientos previos de los niños; (2) una evaluación procesual, mediante la observación directa de los niños, prestando especial atención a su implicación en las actividades y al respeto hacia sus compañeros y material del aula; y (3) una evaluación sumativa, que se llevó a cabo al finalizar la última actividad con las obras artísticas realizadas y con su descripción al resto del aula. También se hizo una encuesta de opinión sobre esta propuesta.

CONCLUSIONES

El clima de interés y relajación que aporta el entorno del arte y la plástica favoreció la entrada y asentamiento de conceptos geométricos y ayudó a los niños a crear producciones artísticas cálidas y cargadas de emociones. Esta propuesta introdujo a los niños en la interpretación de obras de arte, haciendo juicios de valor, expresando sentimientos, y promoviendo la formulación de hipótesis. Por otra parte, permitió identificar las ideas previas que tienen sobre distintos conceptos geométricos que se quieren trabajar (líneas y tipos de líneas, polígonos, clasificación de polígonos, círculo, circunferencia, ángulos) y asentarlas utilizando el geoplano. Por último, motivó a los niños hacia la investigación de los trazos más importantes de la vida y obra de estos pintores, centrándose en la relación con la geometría.

La atención a la diversidad estuvo presente en todas las actividades con la finalidad de adecuar la respuesta educativa a los diferentes ritmos y estilos de aprendizaje,

motivaciones y situaciones sociales y culturales de todos los niños. El uso del geoplano facilitó que pudieran trabajar en el mismo aula realizando actividades adaptadas a cada uno.

La puesta en práctica de esta propuesta puso de manifiesto cómo la teoría bien entendida genera buenas prácticas, lo que lleva a una evaluación positiva del proceso de enseñanza-aprendizaje de la propuesta en sí.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado como parte del proyecto EDU2017-84979-R, del Programa Estatal de Investigación, Desarrollo e Innovación Orientada a los Retos de la Sociedad. También está apoyado por el Proyecto STEMforYouth de la Unión Europea: (Promotion of Stem Education by Key Scientific Challenges and their Impact on our Life and Career Perspectives, dentro del Programa H2020- Seac2015-1-710577).

En recuerdo de Manuel, a su mujer María José y a sus hijos Manu y Fran, a las personas que hacen nuestra vida más feliz.

REFERENCIAS

- Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. M. (1991). *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Editorial Síntesis, S.A.
- Badillo, E. y Edo, M. (2007). *Orientaciones didácticas para el taller de arte y geometría III: líneas (1D), polígonos y otras figuras geométricas planas (2D)* [en línea]. Recuperado el 17 de marzo de http://gent.uab.cat/mequeedo/sites/gent.uab.cat.mequeedo/files/taller_3_2.pdf
- Badillo, E. y Edo, M. (2007). XIII. Taller de arte y geometría en el ciclo superior de primaria II: Triángulos (1ª Parte). Recuperado el 15 de febrero de 2018: http://pagines.uab.cat/meque/sites/pagines.uab.cat.meque/files/Arte_geometria_triangulos_I_0.pdf
- Decreto 105/2014, del 4 de septiembre por el cual se establece el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Galicia. Diario oficial de Galicia. Galicia, 9 de septiembre del 2014, núm. 171, pp. 37406-38087.
- Dickson, L., Brown, M. e Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: MEC. Editorial Labor, S.A.
- Echeita, G. (2006). Educación para la inclusión o educación sin exclusión. Madrid: Narcea.
- Evangelista, D., Pereira, M. J y Souza, J. R. (2011). Geoplano no ensino da matemática. Alguns aspectos e perspectivas da sua utilização na sala de aula. *AMAZÔNIA - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, 7(13), 43-52. Recuperado el 26 de febrero de 2018: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5870364>
- Flores, P., del Río, A. y Ramírez, R. (2015). Sentido espacial. En P. Fores e L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (127-146.) Madrid: Ediciones Pirámide.
- Frega Lucía, A. (2007). *Interdisciplinariedad: Enfoques didácticos para la educación general*. Buenos Aires : Bonum.

- Godino, J. y Ruiz, F. (2002). Geometría y su didáctica para maestros [en línea]. Recuperado el 23 de marzo de 2018: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf
- Gorgal, A., F. Blanco, T., y Salgado, M. y Diego, J. (2017). Iniciación a actividades STEAM desde la Educación Primaria. *Actas del VIII Congreso Internacional de Universidad integrada e innovadora*. Varadero (Matanzas, Cuba), 132-141.
- Iglesias Albarrán, L.M. (2017). Demostraciones del Teorema de Pitágoras con goma Eva. STEAM en el aula de Matemáticas. *Epsilon, Revista de Educación Matemática*, 97, 57-64.
- López, N. R. (2010). Medios y recursos para la enseñanza de la geometría en la educación obligatoria. *Revista Electrónica de Didácticas Específicas*, 3, 13-27.
- Mariño, A. (2000). El geoplano: un recurso manipulable para la comprensión de la geometría. Anuario de Educación Integral. Reflexiones y Experiencias [en línea], 3, 49-75. Recuperado el 20 de marzo de 2018: <http://biblo.una.edu.ve/ojs/index.php/AEI/article/view/64/59>
- Renzulli, J.S. y Reis, S.m. (1997). *The Schoolwide Enrichment Model: A comprehensive plan for education excellence*. Mansfield Center: Creative Learning Press.
- Romero, I. M. y Cañadas, M. C. (2015). Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría. En P. Flores e L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Edicación Primaria* (pgs. 253-279). Madrid: Editorial Pirámide.

Conocimiento de las figuras planas a través del cuento

Ana Escudero-Domínguez
Ángela Arroyo-García
Universidad de Sevilla

Resumen: *Este trabajo tiene como finalidad la enseñanza de la geometría plana en un aula de Educación Infantil. La intervención mostrada es parte de un estudio más amplio, recogiendo aquí tres de las sesiones más importantes. Este trabajo utiliza como eje motivacional el cuento de Por cuatro esquinitas de nada (Ruillier, 2005) cuyos protagonistas nos acompañarán en cada actividad. Además, con la idea de captar aún más la atención del alumnado se elaboran una serie de materiales que permiten su manipulación. Todo ello facilita la concentración y el alcance de un aprendizaje significativo por parte del alumnado.*

Palabras clave: *Cuento, Educación Infantil, Geometría Plana, Intervención, Materiales manipulativos*

Knowledge of flat figures through the tale

Abstract: *The purpose of this article is teaching flat geometry in a classroom of Early Childhood Education. The intervention is part of a larger study, recognizing here the most important sessions where a didactic resource is used as a motivational axis. This is a tale named Por cuatro esquinitas de nada (Ruillier, 2005) whose protagonists will accompany us in each activity. In order to motivate and attract the students' attention, an interactive panel is created, so that facilitate concentration and the scope of learning through manipulation.*

Keywords: *tale, Early Childhood Education, flat geometry, intervention, manipulative materials*

INTRODUCCIÓN

Según algunas asociaciones e investigadores en Didáctica de las Matemáticas (e.g. NCTM, 2000; Clements, 2004) afirman que la enseñanza de las matemáticas en Educación infantil incluye la geometría como un conocimiento significativo. En este conocimiento tiene relevancia la orientación espacial y el reconocimiento de las formas. Esto permite que el alumnado pueda entender mucho mejor el mundo que le rodea (Orden del 5 de Agosto de 2008). Sin embargo, se le otorga menos importancia que a otros bloques de contenidos, dedicando poco tiempo a su enseñanza (Escudero-Domínguez y Carrillo, 2014) y, a veces, limitándola a la identificación de algunas figuras planas. Este tema nos permite de alguna manera u otra reflexionar sobre la importancia de dicho contenido y su enseñanza en un aula de Educación Infantil, haciéndonos preguntas como las siguientes: ¿Realmente no se considera importante el conocimiento de las figuras planas?, ¿Por qué los docentes se conforman con que el alumnado coloree las figuras según sus indicaciones? Son tantos los porqués a los que no encontramos respuesta, que adecuándonos a la manera de aprender que tiene por naturaleza un niño, hemos elaborado un proyecto sobre las figuras planas que responda a las necesidades de los estudiantes. El alumnado a estas edades tiene la necesidad de conocer el mundo que les rodea (Clements, 2004) y no lo hacen de otra manera que poniendo en práctica sus sentidos, de forma que la observación y manipulación son sus aliados. Para comprender mejor los contenidos en la etapa se intenta realizar actividades atractivas. Debido a esto, para el aprendizaje de las figuras planas hemos introducido varios aspectos claves que he considerado esenciales para que se alcance un aprendizaje significativo, tales como: el trabajo por proyectos, el juego, la manipulación y exploración, y el cuento como eje motivacional para el desarrollo del proyecto.

JUSTIFICACIÓN DE LA EXPERIENCIA

Se va a trabajar la enseñanza de la geometría plana que es un saber que aparece en el currículum de Educación Infantil (NCTM, 2000). Al igual que los demás saberes, aparece de forma globalizada, ya que el currículo oficial Español (Orden ECI/3960/2007) aparece estructurado en tres áreas: conocimiento de sí mismo y autonomía personal, conocimiento del entorno y lenguajes: comunicación y representación. Las matemáticas se encuentran explícitamente dentro del conocimiento del entorno, aunque implícitamente también se hallan en las otras dos áreas.

Como modelo de instrucción hemos elegido trabajar por proyectos ya que constituye un modelo donde se realizan actividades de indagación, investigación y experimentación (Muñoz y Díaz, 2009), que asigna al alumnado un papel fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje, dándole a su vez la responsabilidad de ser creador de sus conocimientos y así poder alcanzar un aprendizaje mucho más significativo (Sarceda, Seijas, Fernández y Fouce, 2015). Según Bishop (1999), este método en el área de matemáticas supone una serie de ventajas como favorecer que el alumnado

realice un análisis crítico mediante una enseñanza de aspecto individualizador y fomentando el empleo de una variedad de materiales que estimulan el pensamiento matemático. Además de favorecer la conexión con otros aspectos del currículo escolar (Escudero-Domínguez y Rodríguez, 2015). Para potenciar esto y hacerlo mucho más cercano al alumnado, utilizamos el cuento como eje motivacional durante todo el proyecto, ya que es una herramienta didáctica atractiva (Fernández, 2010) que puede trabajar de manera interdisciplinar todas las áreas del currículo de infantil. Desde el ámbito de las matemáticas, el cuento puede servir para hacerlas más cercanas al alumnado. Por otro lado, en nuestro proyecto le damos un valor potencial al juego ya que permite al alumnado poner en práctica su imaginación (Parks y Schmeichel, 2014). Además de esto, somos conscientes de que el aprendizaje en Educación Infantil se basa en la estimulación de los sentidos (Moreno, 2013) por lo que hemos introducido en nuestro proyecto una serie de materiales que permiten la interacción y manipulación por parte del alumnado.

MÉTODO

Como objetivo principal nos proponemos el acercamiento de las figuras planas al alumnado de la etapa de Educación Infantil a partir de la manipulación y exploración. Para ello se ha llevado a cabo el diseño de una serie de actividades en las que se han abarcado un amplio campo de objetivos y contenidos no sólo matemáticos, sino también de habilidades sociales y lingüísticas. Además del diseño, este proyecto se ha puesto en práctica en un aula de 3 años del CEIP Miguel Hernández situado en el Polígono San Pablo.

La investigación que presentamos es de carácter cualitativo y se enmarca en el contexto de un estudio de mayor extensión (Trabajo Fin de Grado (en adelante TFG)). Inicialmente se dedicaban 9 sesiones, pero debido a la extensión de este documento hemos elegido algunas actividades representativas. La propuesta abarca 3 actividades a través de las que se ha conseguido vincular el aprendizaje de las figuras planas con el disfrute y el gusto por lo que se está realizando. Para ello, se han intercalado diversos materiales y recursos desde papel y lápiz hasta nuestro propio cuerpo.

La metodología utilizada para la evaluación de la adquisición del aprendizaje ha sido la observación. Se han realizado videgrabaciones al alumnado que después han sido transcritas, y a partir de estas se han analizado los diálogos. En estas transcripciones existe un diálogo entre el docente y el alumno quedando reflejado, para el primero la letra “P” y para el segundo la letra “A” acompañada si requiere de un número que distingue la intervención del alumnado.

DISEÑO DE ACTIVIDADES

La intervención aquí recogida muestra 3 actividades enfocadas a la enseñanza de varias figuras planas como son el triángulo, el rectángulo, el rombo, el cuadrado y el círculo. El círculo y el cuadrado han sido las primeras figuras que se han trabajado en el



Figura 1a. Panel interactivo.

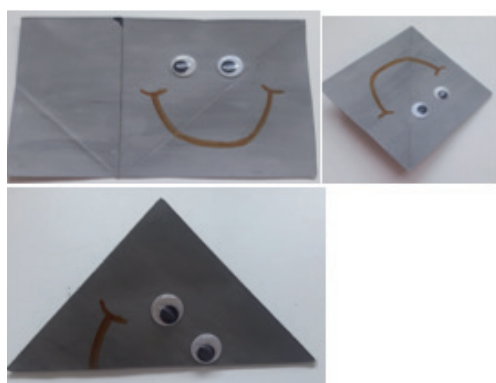


Figura 1b. Transformaciones.



Figura 1c. Cambio.

proyecto ya que son los protagonistas del cuento elegido. A través de éste se ha introducido al alumnado en este mundo de las figuras planas. A lo largo de las actividades se trabaja el número de lados y vértices de distintas figuras. Además, en una de ellas realizaremos una comparación entre el cuadrado y rectángulo, atendiendo a la longitud de los lados.

El cuento elegido cuenta la historia de un grupo de amigos todos redondos (círculos) menos uno, cuadradito (cuadrado). Al sonar el timbre, todos tienen que entrar a la casa pero la puerta es redonda, y los redonditos entran sin problema, pero ¿y cuadradito? Cuadradito no puede entrar por la puerta y se pone muy triste e intenta hacer lo posible por entrar (se alarga, se dobla y se pone cabeza abajo), pero no lo consigue. Entonces, los redonditos se ponen a pensar qué hacer para ayudar a cuadradito y, entre todos, llegan a la conclusión de que hay que cortarle las cuatro esquinitas a la puerta.

El cuento está creado para trabajar la inclusión, pero nosotros vamos a enfatizar con él la geometría plana. Como hemos descrito anteriormente, creemos importante el uso de material manipulativo en la etapa, por ello realizamos un panel de elaboración propia donde hemos representado el cuento (Figura 1). En la Figura 1a observamos

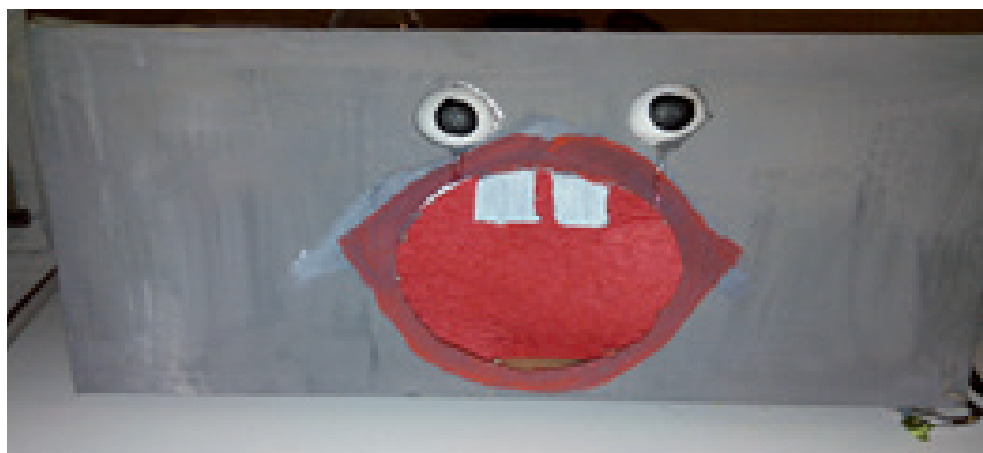


Figura 2. Caja para tacto.

cómo se encuentran todos los niños fuera de la casa, todos con forma de círculo excepto uno. En esta primera representación la puerta de la casa es un círculo. En la Figura 1b observamos los distintos cambios que realiza cuadradito para intentar pasar por la puerta y, por último, en la Figura 1c encontramos la solución para que todos puedan pasar por la puerta.

Como hemos comentado anteriormente este trabajo muestra una síntesis de un trabajo más extenso (TFG) en el que se diseñaron y se llevaron a cabo distintas actividades en un aula de Educación Infantil. Aquí mostramos tres de ellas:

La primera actividad es la lectura del cuento, que la vamos a realizar manipulando el panel interactivo que hemos creado. En esta el alumnado tiene que ir introduciendo los redonditos por la puerta (Figura 1a). Cuando cuadradito intenta entrar por la puerta y vemos que no entra, sacamos otro cuadradito hecho de cartulina que nos permite observar los cambios que éste sufre para poder entrar por la puerta. Para entrar, cuadradito se alarga (rectángulo), se dobla (triángulo) y se pone boca abajo (rombo) (Figura 1b). Al ver que no entra, se le pregunta al alumnado sobre la posible solución del problema y entre todos llegan a la solución (Figura 1c).

En la siguiente actividad se trabaja la designación de las diversas figuras a través del sentido del tacto. Para ello, utilizamos una caja donde introducimos figuras de los bloques lógicos (cuadrados, rectángulos, triángulos y círculos) y el alumnado, por turnos, ha de adivinar. Para seguir con el eje motivacional del proyecto decoramos la caja como se muestra en la Figura 2.

Como última actividad se realiza un trivial donde se recoge todo lo aprendido anteriormente. Esta actividad está diseñada para trabajarse en pequeños grupos de 5-6 alumnos. Diseñamos para este juego cuatro tipos de cartas: la de color amarillo, que están compuestas por imágenes donde el alumnado ha de buscar las figuras que le indique el docente; las de color verde, donde se le indica la figura que el alumnado ha de dibujar; las de color azul, donde el alumnado tiene que designar el mensaje y resolverlo; y, por último, las cartas de color rojo, que son unas adivinanzas sobre las figuras.



Figura 3a. Tablero.

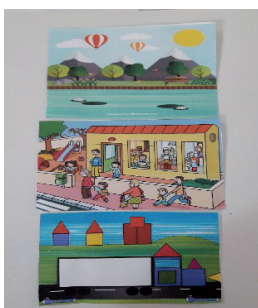


Figura 3b. Cartas amarillas.

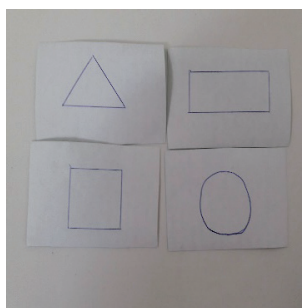


Figura 3c. Cartas verdes.

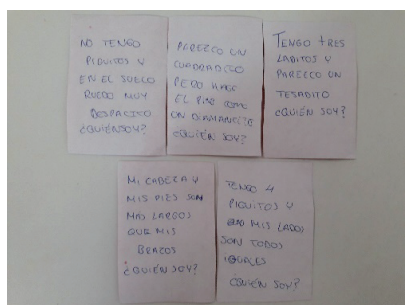


Figura 3d. Cartas rojas.

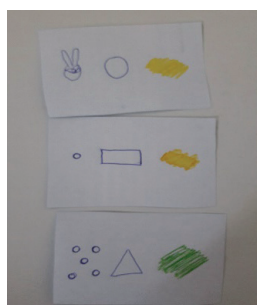


Figura 3e. Cartas azules.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Pasamos a mostrar los resultados obtenidos en la puesta en práctica de esta propuesta educativa para la enseñanza de las figuras planas en la etapa de Educación Infantil. Para enriquecer los datos mostraremos alguna fotografía y/o transcripción.

Actividad 1. Lectura del cuento

En esta primera actividad el alumnado permaneció atento durante toda la lectura del cuento, mostrando además las ganas por interactuar con el panel elaborado, por lo que constatamos que el uso de material manipulativo en estas edades potencia el trabajo en el aula (Figura 4a). Cuando nos dispusimos a observar las transformaciones que sufría cuadradito en su esfuerzo por entrar por la puerta, sentíamos como al alumnado le costaba distinguir a simple vista las cualidades de las distintas figuras planas. La que con más facilidad identificaron fue el triángulo, quedando el rombo como la más difícil. Tras observar que con las distintas transformaciones cuadradito sigue sin poder entrar por la puerta, se le pregunta al alumnado, para, entre todos, poder llegar a la solución del problema (Tabla 1).

Tabla 1. Transcripción de parte de la actividad 1

P: "¿Qué podemos hacer para que cuadradito entre por la puerta?"
A1: "Le cortamos los pelos".
A2: "Hacemos el agujero más grande".
A3: "Que entre por la chimenea".
A2: "O por la ventana".
A4: "Cambiar la forma como el niño que es un cuadrado".
P: "Muy bien A4, para que cuadradito entre por la puerta debemos cambiar la forma de la puerta" (figura 4b).



Figura 4a. Introducimos a los redonditos. Figura 4b. Puerta cuadrada.

Actividad 2. Caja para el tacto.

Con respecto a la segunda actividad, la figura mejor detectada por el alumnado a través del tacto ha sido el círculo. Esto se debe a que es la única que no tiene vértices. La siguiente mejor detectada fue el cuadrado debido a que es el único que tiene todos los lados iguales, lo que hace que sea más fácil de detectar por el tacto (Figura 5).



Figura 5. Designar figuras.

Actividad 3. Trivial

En la tercera actividad, trivial, nos llamó la atención que la mayoría del alumnado ha requerido contar los puntos del dado para averiguar el número 6 (Figura 6). Con el resto de números parece que el alumnado tenía adquirida la subitización.

Con respecto a las cartas de colores, la carta *amarilla*, donde el alumnado tenía que identificar distintas figuras, ha sido la más fácil para resolver (Figuras 7a y 7b).

La carta *azul* ha requerido la ayuda del docente y no para la subitización o designación del mensaje sino para la resolución de los problemas aritméticos elementales



Figura 6.
Conteo.



Figura 7a. Buscando círculos.



Figura 7b. Buscando rectángulos.

(aditivos). Mostramos, a continuación, el ejemplo de una alumna que tiene que reunir 5 triángulos verdes (Tabla 2).

Tabla 2. Fotografía y transcripción de un ejemplo de carta azul



P: “Cuántos tienes?”
A1: “6 (los cuenta)”
P: “¿Cuántos necesitas?”
A1: “5”
P: “¿Y qué podemos hacer? ¿Quitar o poner?” (mientras la alumna se dirige a poner uno más).
A1: “Quitar” (retrocede, quita uno y los cuenta) “Ya hay 5”.

Con respecto a la carta *verde* donde se pedía que representaran la figura mostrada, se observó cómo a esta edad hay diferentes niveles en el manejo del lápiz. Algunos alumnos fueron capaces de realizar correctamente el trazo de la figura, mientras que otros no lo tenían del todo adquirido (Figuras 8a, 8b y 8c).

Y, por último, de las cartas *rojas* comentar que las adivinanzas han sido resueltas con éxito entre el alumnado. Con respecto a la solución de estas, les ha resultado más fácil la del triángulo (Figura 9) y el círculo.

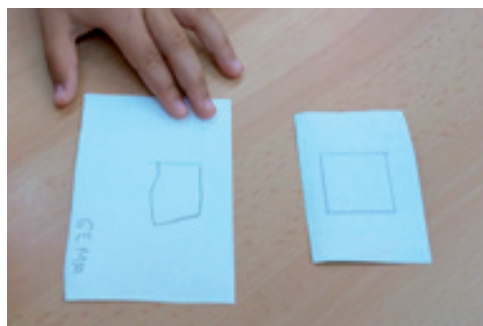


Figura 8a. Rectángulo 1.

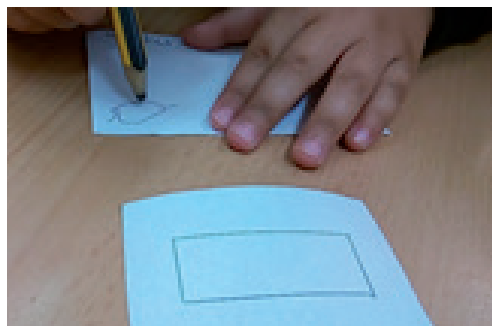


Figura 8b. Rectángulo 2.

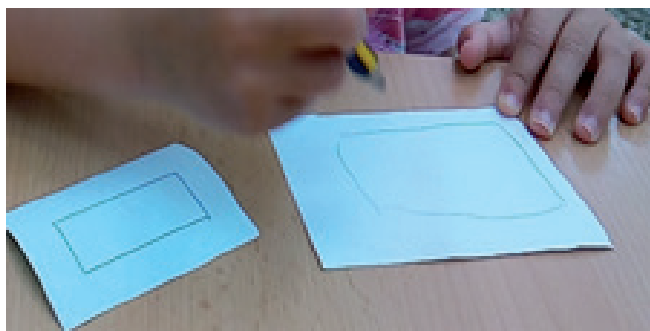


Figura 8c.
Rectángulo 3.

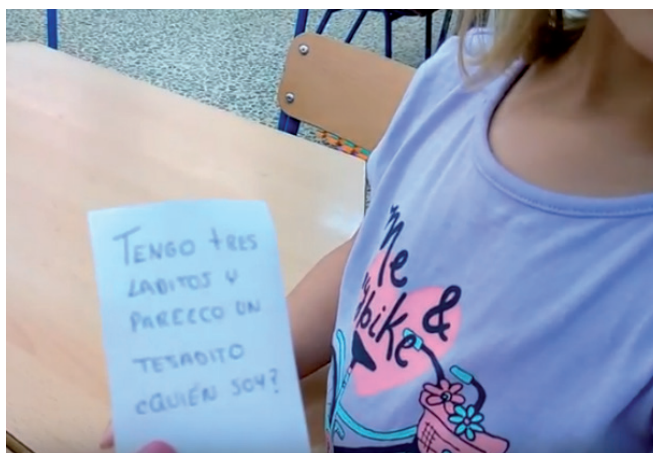


Figura 9.
Adivinanza del triángulo.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La elaboración de proyectos es un método que acerca los contenidos a un contexto cercano al alumnado (Escudero_Domínguez y Rodríguez, 2015). Los alumnos se comprometen en la construcción de su propio aprendizaje a través de tareas divertidas y motivadoras, en las que el juego está presente (Parks y Schmeichel, 2014; De Gyves, 2018). Atendiendo a los resultados obtenidos se puede concluir que el alumnado ha

adquirido los conocimientos que se pretendían acerca de las figuras planas. La aportación clave de esta propuesta ha sido el éxito de utilizar un cuento como el de *Por cuatro esquinitas de nada* como un recurso didáctico en la enseñanza de matemáticas (Fernández, 2010). En este sentido, podemos afirmar que es el docente el que tiene la capacidad para crear e innovar y hacer de sus clases un espacio más divertido y cómodo para enseñar. Ligado con lo anterior podemos corroborar que el uso de material manipulativo ha permitido que el alumno adquiera un papel principal en todo el proceso de aprendizaje (Moreno, 2013). Ellos han sido quienes han ido creando sus conocimientos y estos se han ido fortaleciendo gracias a la manipulación y exploración con los diversos materiales, permitiéndoles comprobar por ellos mismos si son válidas o no sus hipótesis. También le ha permitido estar mucho más concentrado en la actividad ya que estos materiales de elaboración propia han sido la esencia para captar la atención del alumnado. Con la propuesta diseñada el alumnado ha sido capaz de familiarizarse con algunas características de las figuras planas, empleando para ello vocabulario geométrico. Además de ayudarnos en el estudio de distintas figuras planas, este proyecto nos ha servido para trabajar otros contenidos, entre los que destacar los lingüísticos y sociales como el respeto hacia las opiniones de los demás, la diversidad y la inclusión. Lo anterior afirma que este proyecto tiene en cuenta el currículo oficial Español (Orden ECI/3960/2007) ya que alberca distintos saberes, de forma globalizada.

BIBLIOGRAFÍA

- Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.
- Clements, D.H. (2004). Major themes and recommendations. In D.H., Clements, J. Sarama, & A.-M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- De Gyves, N.D. (2018). Las matemáticas puestas en juego. *Épsilon, Revista de Educación Matemática*, 99, 43-54
- Escudero-Domínguez, A. y Carrillo, J. (2014). Conocimiento matemático sobre cuadriláteros en estudiantes para maestro. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 267-276). Salamanca: SEIEM.
- Escudero-Domínguez, A. y Rodríguez, M.J. (2015). La importancia de los números en segundo ciclo de Educación Primaria. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 90, 49-72
- Fernández, C.G. (2010). El cuento como recurso didáctico. *Revista digital de innovación y experiencias educativas*, 26. Recuperado de https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csif/revista/pdf/Numero_26/CRISTINA_GEMA_FERNANDEZ_SERON_01.pdf
- Moreno, F.M. (2013). La manipulación de los materiales como recurso didáctico en educación infantil. *Estudios sobre el Mensaje Periodístico*, 19, 329-337.
- Muñoz, A. y Díaz, M^a. R. (2009). Metodología por proyectos en el área de conocimiento del medio. *Revista Docencia e Investigación*, 19, 101-126.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

- Orden de 5 de Agosto de 2008, por la que se desarrolla el Currículo correspondiente a la Educación Infantil en Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, 26 de Agosto de 2008, nº 169.
- Orden ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil, contenidos y criterios de evaluación. Boletín Oficial del Estado, número 5 de 5 de enero de 2008.
- Parks, A. N., y Schmeichel, M. (2014). Children, mathematics and videotape: Using multimodal analysis to bring bodies into early childhood assessment interviews. *American Educational Research Journal*, 51(3), 505–537.
- Ruillier, J. (2005). *Por cuatro esquinitas de nada*. Barcelona: Editorial Juventud.
- Sarceda, M. C., Seijas, S. M., Fernández, V. y Fouce, D. (2015). El trabajo por proyectos en Educación Infantil: aproximación teórica y práctica. *Reladei*, 4(3), 159-176.

Introducción del Teorema de Pitágoras y del Teorema del Coseno mediante el uso de balanzas

David Gutiérrez-Rubio
Universidad de Córdoba

Carmen León-Mantero
Universidad de Córdoba

María José Madrid-Martín
Universidad Pontificia de Salamanca

María Teresa Sánchez-Compañá
Universidad de Málaga

Resumen: *Se presenta una propuesta de clase para la enseñanza del Teorema de Pitágoras en su versión general a través de materiales manipulativos y el uso de una balanza para comparar áreas de figuras planas. También se realiza una representación previa del Teorema del Coseno, sin el uso de razones trigonométricas, a través de una balanza de brazos graduados.*

Palabras clave: *Teorema de Pitágoras, Teorema del Coseno, balanza, Educación Secundaria, Geometría*

Introduction of the Pythagorean Theorem and the Cosine Theorem by using scales

Abstract: *We present a class proposal for the teaching of the Pythagorean theorem in its general version with manipulative materials and the use of a scale to compare areas of flat figures. A previous representation of the Cosine Theorem is also performed, without the use of trigonometric reasons, using a scale with graded arms.*

Keywords: *Pythagorean theorem, Cosine Theorem, scale, Secondary Education, Geometry*

INTRODUCCIÓN

El Teorema de Pitágoras es uno de los resultados de geometría plana más conocidos y más demostrados, con alrededor de 400 demostraciones conocidas (Maor, 2007). Aunque existen muchas formas de representarlo, la más utilizada es la forma algebraica $a^2 + b^2 = c^2$.

El Real Decreto 1105/2014 de contenidos de Educación Secundaria Obligatoria establece, dentro de los contenidos mínimos en 1º de Educación Secundaria Obligatoria dentro del territorio español, la enseñanza del Teorema de Pitágoras, con su justificación geométrica. Asimismo, dentro de los contenidos del bloque transversal “Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas” se incluye el “Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos”.

Como señala Galo-Sánchez (2018), en muchas ocasiones un problema clásico casi siempre se expone de manera parcial a través de ejemplos particulares que no detallan la totalidad de las posibilidades de demostración o de visualización desde perspectivas diferentes. Sin embargo, entre el profesorado es un tema recurrente en cuanto a propuestas de enseñanza tanto a nivel de congresos como de revistas dirigidas a los docentes tanto de primaria como de secundaria (Troyano y Flores, 2016; Gutiérrez-Rubio, 2017).

En esta propuesta mostramos el uso de un recurso didáctico como es el de la balanza para la introducción geométrica del Teorema de Pitágoras. El uso de la balanza como forma de representación de igualdades se ha planteado por varios autores como recurso didáctico para la enseñanza de ecuaciones (Rojano, 2010) o para el cálculo de proporciones de compuestos (Altés & Real, 1995), entre muchos otros. Como afirman otros autores el uso de materiales didácticos en la clase de matemáticas crea un ambiente favorable no sólo para la comprensión de los conceptos sino también para inculcar en los alumnos actitudes positivas y de empatía hacia las matemáticas (Maz-Machado y Jiménez-Fanjul, 2012).

CONCEPTOS PREVIOS

Esta propuesta se plantea para alumnos de 1ºESO, donde se plantea por primera vez dicho Teorema. Lo introduciremos como un caso particular de un resultado más general que establece que el ángulo que forman los lados a , b es agudo (resp. obtuso) si $a^2 + b^2 > c^2$, (resp $<$). El caso intermedio donde se da la igualdad es el caso intermedio entre agudo y obtuso que corresponde a un ángulo recto.

El material que utilizaremos consistirá en una balanza que utilizaremos para comparar pesos. En principio no es necesario ningún tipo de balanza especial, aunque para la última actividad será necesario una balanza de brazos graduados, similar a la representada en la Figura 1:

Recortaremos cuadrados de varios tamaños de colores rojo (que formarán los lados a, b) y azul (que formarán el lado c), que pueden ser de madera o de un cartón lo bastante grueso para que su peso sea significativo. Para obtener una casuística suficiente hemos elegidos cuadrados de lados (en centímetros) 6, 9, 9, 12 en color rojo y 10, 11.65, 12.72,

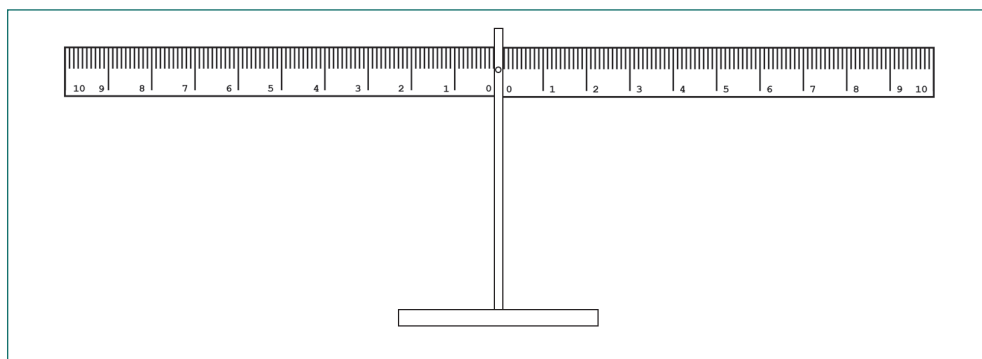


Figura 1. Balanza con brazos graduados

14, 15, 16, 20 en color azul. Cada rectángulo estará atravesado por un cordel de masa despreciable, para poder colgarlo del brazo de la balanza a la distancia que se quiera. También haremos uso de dos rectángulos de dimensiones 9×12 como introducción al Teorema del Coseno.

Utilizaremos un papel en blanco donde tenemos impreso un transportador de ángulos, a modo de tapete para realizar las construcciones de los diferentes triángulos en la actividad.

DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES

Las actividades se desarrollarán en una única sesión que pasamos a describir a continuación:

Primera sesión:

Explicaremos a los alumnos que usando los lados de 3 cuadrados vamos a construir un triángulo. Para ello elegiremos dos cuadrados, colocando ambos con un vértice común en el centro del transportador de ángulos y uno de ellos alineado con el 0, como se muestra en la Figura 2.

Posteriormente se cogerá un tercer cuadrado y se formará un triángulo, procurando que los cuadrados colocados con anterioridad sigan teniendo su vértice común en el centro del transportador, como se ve en la Figura 3.

Preguntaremos qué ángulo forman los dos cuadrados rojos, no solo la medición sino que haremos énfasis en si es agudo, recto u obtuso. A continuación pediremos a los alumnos que comparen los pesos de los dos cuadrados rojos con los del cuadrado azul, colgándolos de la balanza a igual distancia del centro ¿cuál pesa más? Si efectúan la pesada correctamente y el ángulo resultante era agudo, los dos cuadrados rojos pesarán más que el azul, mientras que si el ángulo es obtuso los cuadrados rojos pesarán menos que el azul.

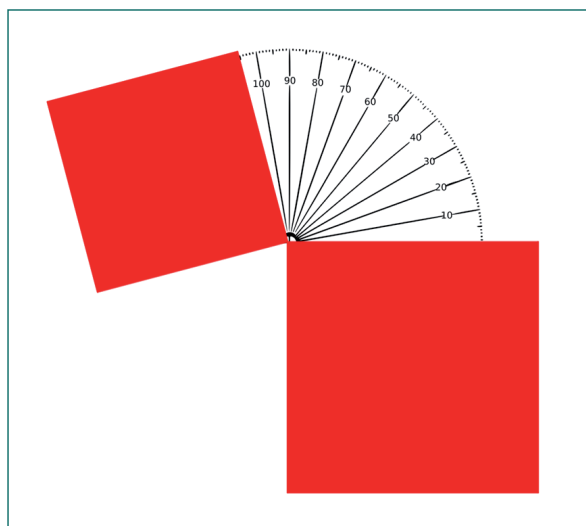


Figura 2.
Colocación de los dos primeros rectángulos.

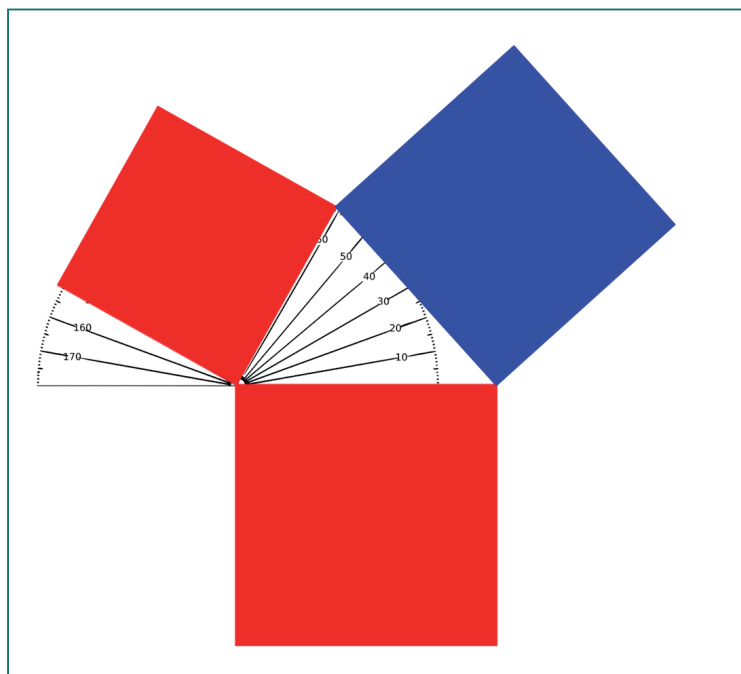


Figura 3:
Formación del triángulo

Repetiremos este experimento varias veces (evitaremos el caso del ángulo recto por ahora), rellenando la tabla de la página siguiente.

Pediremos ahora que formen el triángulo con los rojos de longitudes 6 cm y 9 cm y el azul de longitud 10cm y deberán responder, sin realizar la pesada, qué creen que pesará más, si las dos piezas rojas juntas o la azul. Llegados a este punto deberían de haber descubierto que los ángulos obtusos corresponden a piezas azules “muy grandes” que son

Lados de los rojos	Lado del azul	Ángulo que forman los rojos (aprox)	¿Pesan más los rojos o el azul?
9 y 12	11	61°	LOS ROJOS
9 y 12	14	82°	LOS ROJOS
9 y 12	16	98°	EL AZUL
9 y 12	20	145°	EL AZUL
6 y 9	11.65	100°	EL AZUL

más pesadas que las rojas, mientras que los agudos corresponden al caso contrario. Planteamos entonces el caso intermedio ¿y qué ocurre cuando la pieza azul pesa exactamente lo mismo que las dos piezas rojas juntas? Es decir, si la pieza azul ni es más pesada ni menos pesada que las dos rojas juntas, el ángulo que forman ni será obtuso ni será agudo. Por exclusión, deberían deducir que el ángulo que forman ha de ser recto.

Llegados a este punto, estamos en condiciones de cambiar de la representación geométrica a la algebraica, pero antes tomaremos un paso intermedio, utilizando la representación numérica. Centrándonos en un trio de figuras que equilibren la balanza (por ejemplo, los cuadrados de lados 9 cm, 12 cm y 15 cm), pediremos que, utilizando una regla, calculen sus áreas, obteniendo 81 cm², 144 cm² y 225 cm² respectivamente. Preguntamos si, dado que la balanza estaba equilibrada con esas piezas, la suma de las áreas de los cuadrados rojos ha de ser igual a la del cuadrado azul. Si la clase no tiene dudas al respecto, escribimos dicha igualdad en la pizarra:

$$81 + 144 = 225$$

Para hallar una ley general que nos sirva, aclaramos, debemos aclarar de dónde proceden estos números. 81 era el área de uno de los cuadrados rojos, que hemos calculado haciendo $9 \times 9 = 9^2$. De igual modo con los otros números:

$$9^2 + 12^2 = 15^2$$

Observamos que son los lados del triángulo rectángulo para poder hacer la relación. Entonces, dibujando un triángulo rectángulo de lados a , b y c , podemos generalizar el resultado anterior al Teorema de Pitágoras en su forma más conocida:

$$a^2 + b^2 < c^2 \text{ (resp. } a^2 + b^2 > c^2 \text{)}$$

Tenemos que hacer notar que el ángulo recto ha de ser el que forman los lados de los dos cuadrados rojos. Dichos lados rojos los denominamos catetos y el lado azul hipotenusa.

Podemos preguntar cómo quedaría la ecuación si el ángulo que forman los lados rojos fuera obtuso (resp. agudo):

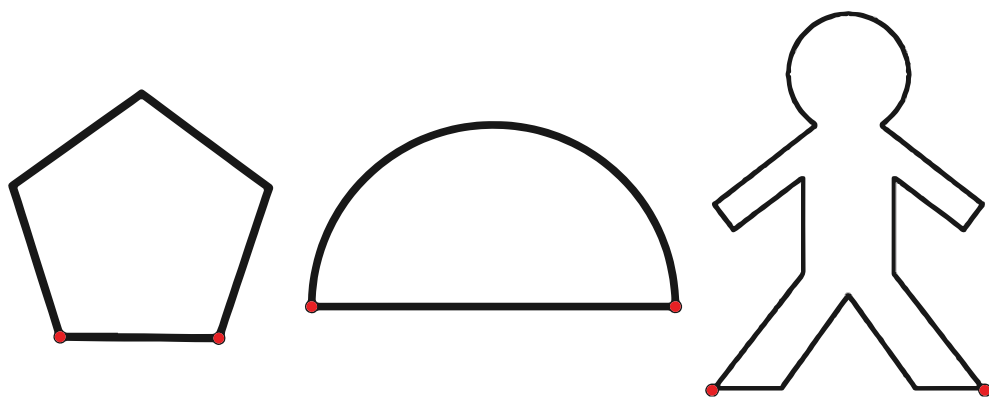


Figura 4: Figuras alternativas al cuadrado (Fuente: Elaboración propia).

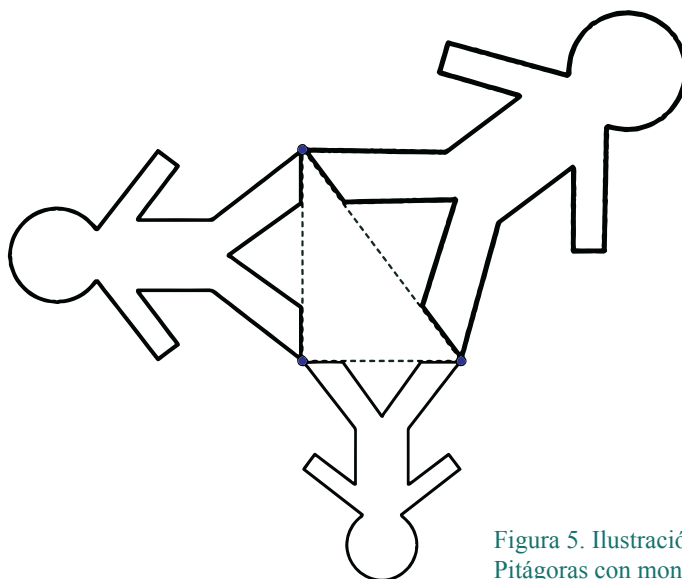


Figura 5. Ilustración del Teorema de Pitágoras con monigotes.

Podemos generalizar este resultado con figuras que no sean cuadradas, como pentágonos o cualquier contorno que tenga una base recta bien delimitada para hacer las veces de lado del triángulo. En la figura 4 se muestran algunos ejemplos:

En rojo se han marcado los puntos de referencia para crear los lados de los triángulos. Puede ser sorprendente para los alumnos comprobar que la balanza se equilibra con formas cualesquiera sin más que comprobar que se puede construir un triángulo rectángulo con sus bases (figura 5).

Para enriquecer más el uso de la balanza en la sesión, se puede terminar introduciendo un avance de el Teorema del Coseno, sin necesidad de introducir razones trigonométricas propiamente dichas, de la siguiente manera: Partimos de la siguiente construcción de los cuadrados de tamaños 6 y 9 (marcados en rojo) (figura 6):

En verde 6×9 están representados los dos rectángulos necesarios para completar el cuadrado. A continuación, pediremos a la clase que realicen un triángulo con los lados rojos 6 y 9 y un lado azul cualquiera, por ejemplo 14. En este caso, el ángulo que forman los lados rojos es de 137° aproximadamente. A estas alturas ya es obvio para la clase que la pieza azul pesará más que las dos rojas juntas, lo que comprobamos con la balanza. Ahora retamos a un alumno a que cuelgue los dos rectángulos verdes juntos en algún lugar de la balanza de forma que esta quede equilibrada, pero que solo dispone de un intento, como se muestra de manera esquemática en la figura 7.

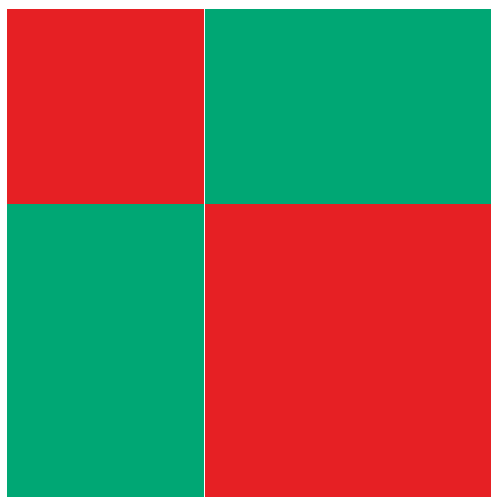


Figura 6. Cuadrados de lados 6 y 9 con rectángulos 6×9 .

Después de pensar y colocar las piezas, lo más probable es que no consiga su objetivo. Decimos entonces que nosotros, con un simple cálculo a partir del ángulo que forman las piezas rojas, podemos colocar las piezas verdes de manera exacta para que quede la balanza equilibrada. Para ello, solo tenemos que calcular el coseno del ángulo que formaron las piezas rojas al construir el triángulo (en este caso $\cos(137^\circ) = -0,73$). Si nuestra balanza está graduada de 0 a 10 (como en la Figura 7), y hemos colgado las piezas rojas y azul a 10 unidades del centro, colocaremos las piezas verdes a una distancia de $-7,3$ unidades (en este caso el valor negativo indica que las colgamos del brazo de las piezas rojas), consiguiendo que la balanza esté equilibrada, como se muestra en la Figura 8.

Podemos repetir esta acción varias veces para convencerles de que no es pura suerte, sino que la matemática nos permite saber de antemano muchas cosas sin necesidad de probar por el método de ensayo y error. Por último les diremos que hemos utilizado una función que existe en las calculadoras científicas como las que ellos tienen llamada coseno, que se calcula a partir del ángulo que forman las piezas rojas al construir el triángulo con la azul, y que verán en cursos posteriores.

CONCLUSIONES

Hemos presentado una propuesta que va en línea con el planteamiento de Iglesias (2017) respecto a que la geometría hay que verla, construirla, tocarla y manipularla. El uso de balanzas y de la correspondencia área-peso a igual densidad/grosor como en el caso de planchas de madera o de cartón, nos permite utilizar un modelo físico para el trabajo con áreas, permitiendo su comparación con materiales manipulativos, y permitiendo al alumnado una introducción intuitiva al Teorema de Pitágoras siguiendo el orden deseable de menos abstracto a más abstracto. Por su parte, el estudio de los casos de ángulo obtuso y

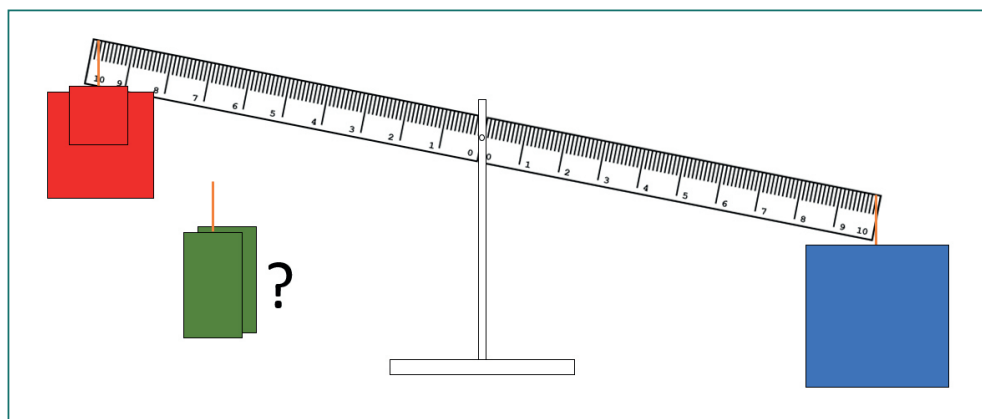


Figura 7. Teorema del Coseno representado como un problema de balanza.

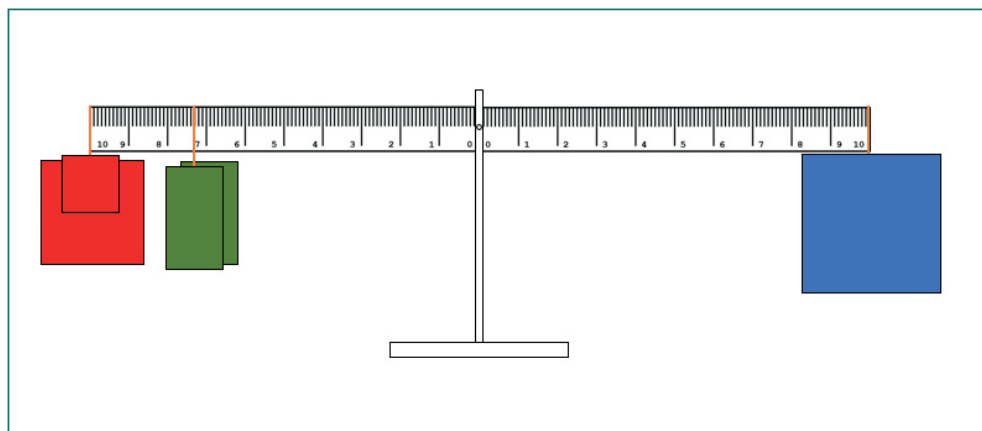


Figura 8: Solución con la balanza del Teorema del Coseno.

agudo permite el uso del pensamiento deductivo para concluir el Teorema de Pitágoras como un caso frontera entre ambos.

REFERENCIAS

- Altés, A. S., & Real, J. S. (1995). Aplicación didáctica de la balanza "pesaoro" de Arquímedes. *Enseñanza de Las Ciencias*, 13(1), 107–112.
- Galo-Sánchez, J.R. (2018). Partición prismática de un cubo en seis pirámides triangulares equivalentes. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 1(2), 1-20.
- Gutiérrez-Rubio, D. (2017). Uso de representaciones verbales en la enseñanza del Teorema de Tales. *Épsilon, Revista de Educación Matemática*, 97, 75-80.
- Troyano, J. y Flores, P. (2016). Percepción de los alumnos acerca del teorema de Pitágoras. *Épsilon, Revista de Educación Matemática*, 33(3), 51-60.

- Iglesias, L. M. (2017). Demostraciones del Teorema de Pitágoras con goma EVA. STEEAM en el aula de matemáticas. *Épsilon, Revista de Educación Matemática*, 97, 57-64.
- Maor, E. (2007). *The Pythagorean theorem: a 4,000-year history*. New Jersey: Princeton University Press.
- Maz-Machado, A. y Jiménez-Fanjul, N. (2012). Ajedrez para trabajar patrones en matemáticas en educación primaria. *Épsilon. Revista de Educación Matemática*, 81, 105-112.
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, 3 de enero de 2015, núm. 3, p. 179, p. 193, pp. 395-398.
- Rojano, T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números. Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, 75, 5–20.

RINCÓN “SAPERE AUDE”... ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Huelva

sixto@uhu.es

INTRODUCCIÓN

Matemáticas: ¿dónde comenzó todo?

Como anunciábamos en el número anterior, este sub-apartado lo vamos a dedicar a algunas ideas sobre lo que significó el **pitagorismo**.

Pitágoras es de todos los filósofos de la alta antigüedad el más conocido y, por así decirlo, sigue siendo el más popular. Sabemos, sin embargo, muy poco de sus doctrinas: no tenemos trabajo de él, sino solo algunos fragmentos de uno de sus discípulos llamado Filolao de Crotona (449 a.C-350 a.C).

Incluso es imposible, para nosotros, distinguir la enseñanza del maestro de las teorías de los discípulos. Solo podemos hablar de pitagorismo, sin pretender saber lo que pensaba Pitágoras. Además, la mayor parte de la información que se ha mantenido, dispersa en una gran cantidad de libros, merece poca confianza. Pitágoras pronto se convirtió



Figura 1. (Xilografía del medioevo que muestra a Pitágoras y Filolao con instrumentos musicales)
<https://es.wikipedia.org/wiki/Filolao>.

en una figura legendaria: ha funcionado muy mucho la fantasía de los poetas y escritores. Nada es más difícil que desentrañar, entre tantas historias fabulosas o contradictorias, la parte de verdad que contienen.

Hay que distinguir dos aspectos en el pitagorismo: uno filosófico como la explicación del universo y otro la doctrina moral.

La filosofía pitagórica se resume en: **todo lo que existe es un número**. La esencia y el principio de las cosas es el número. Para comprender el significado de esta expresión, aparentemente extraña, debe recordarse que los pitagóricos estaban bien versados en el estudio de las matemáticas. También demostró por primera vez el conocido teorema sobre el cuadrado de la hipotenusa, y su alegría fue tan grande después de este descubrimiento que ofreció un sacrificio solemne a Júpiter. Consecuentemente hay que suponer que muchos matemáticos *bien entrenados* han estado dispuestos a ver los números en todas partes.

Se dice que Pitágoras, un día en una fragua, notó que los martillos, al caer sobre los yunques, hacían diferentes sonidos, y que estos sonidos variaban según el tamaño de los martillos. Cualquiera que sea el valor que se le dé a esta historia, cuya autenticidad se ha discutido, al menos es probable que demuestre que las observaciones atentas y juiciosas llevaron a Pitágoras a una concepción del mundo al principio muy extraña. También había observado que los sonidos de la lira son proporcionales a la longitud de las cuerdas y, en consecuencia, que una rigurosa ley matemática regula la producción de sonidos. Al generalizar esta idea, Pitágoras concluye que todo en el mundo físico obedece a las leyes del número, (verdad confirmada por la ciencia moderna).

Sus discípulos abusaron de esta fórmula ya excesiva, y terminaron en extravagancias reales, como decir que la justicia es el número cuatro, o que el matrimonio es el número cinco. Pitágoras no es responsable de estas locuras. Al margen de las aplicaciones ilegítimas que se hicieron, su idea básica era correcta: **visión de genio**.

Todos los pitagóricos no cayeron en estos excesos, y su buena fortuna deseaba que algunos, por una especie de casualidad, sin duda, o de adivinación, y sin poder justificar sus afirmaciones por razones sólidas, debieran ser conducidos a las concepciones. Muy extraordinario por el tiempo que vivieron. Así declararon que debe haber antípodas, y se dice que cuando Cristóbal Colón emprendió su viaje, **estaba en la fe de una tradición pitagórica** y habían adivinado el movimiento de la tierra. Copérnico declaró expresamente que cuando descubrió el verdadero sistema del mundo y demostró que es la Tierra quién se mueve alrededor del Sol, se inspiró en la idea ya expresada por los pitagóricos: **una verdad**.

Referente a su doctrina moral más que a sus teorías filosóficas es cuándo Pitágoras alcanza mayor éxito, y por tanto la fama. En esto, los historiadores no se ponen de acuerdo: entre su filosofía y su moralidad, es difícil percibir cualquier conexión. Algunos historiadores creen que son bastante independientes entre sí. Como ha demostrado el historiador alemán A. Schwegler, es probable que Pitágoras, que pertenecía a la raza doriana, notable entre todas las razas griegas por su austera moral y sus rígidas virtudes (los espartanos eran dorios), se uniera en un cuerpo de doctrina, y formulado de una manera más precisa, las ideas que había conocido desde la infancia, y que eran familiares para todos sus compatriotas.

Pitágoras había fundado un Instituto, una especie de orden, un monasterio, donde él y sus discípulos, entre los cuales se encontraban algunas mujeres, vivían bajo leyes

comunes de gran severidad. "...El reclutamiento de los miembros de la orden", dice M. Chaignet, "se realizó con mucho cuidado. Pitágoras estudió severamente la vocación de los jóvenes que se le presentaban, antes de admitirlos en las primeras iniciaciones de esta nueva vida; procuró leer en sus rostros, adivinar en su modo de andar, en sus actitudes, en todos los hábitos de su persona, las inclinaciones de sus almas, el verdadero trasfondo de su carácter, las aptitudes propias de su espíritu....". Incluso después de estas pruebas, solo unos pocos fueron introducidos en la doctrina del Maestro que entre todos los miembros de la hermandad la propiedad era común y que debían restringirse al silencio, abstenerse de comer carne y frijoles, pero estos detalles se cree que no son verdad, sobre todo la última afirmación. Lo que es incontestable es que Pitágoras se había fijado una meta moral y religiosa.

Afirma el historiador Ed. Zeller, "...Quería fundar una escuela de piedad, buena moral, templanza, valor, orden, obediencia a la ley, fidelidad en la amistad...De manera general, deseaba hacer florecer en su escuela todas las virtudes que formaban al hombre honesto según las ideas griegas, y particularmente de acuerdo con las ideas y virtudes que también se recomiendan preferiblemente en las oraciones más o menos auténticas atribuidas a Pitágoras."

Es a este carácter moral y religioso al que se debe que las teorías pitagóricas están relacionadas con la transmigración de las almas, o la metempsicosis. Los cuerpos son como prisiones en las que la divinidad ha encerrado a las almas para castigarlas. Separado del cuerpo, el alma, cuando ha merecido una recompensa en virtud de sus virtudes anteriores, conduce a un mundo superior, a una vida incorpórea. Si ha sido culpable, debe ser castigada e incluso condenada a hacer nuevas peregrinaciones a través de cuerpos de hombres o animales.

La asociación pitagórica tenía un carácter político muy marcado. La forma más importante de gobierno entre los dorios era el gobierno aristocrático. Los pitagóricos en todas partes ejercieron su influencia, que parece haber sido considerable, al servicio del partido aristocrático, y lucharon con todas sus fuerzas por la democracia en las ciudades de la Gran Grecia: eran especialmente maestros en Crotona donde Pitágoras pasó los últimos años de su vida.

En una escuela que tenía tanta preocupación por las cosas morales y el sentido de organización política, es imposible que las teorías educativas no ocupen un lugar grande. El testimonio preciso nos dice que Pitágoras había escrito un tratado sobre educación; pero, por otro lado, hay razones suficientes para creer que Pitágoras no había escrito nada. En cualquier caso, uno de sus seguidores, Archytas de Tarentum (428 a.C.-350 a.C), había publicado un tratado sobre educación moral.

En cierto sentido, se puede decir que **todo pitagorismo, previsto en su doctrina moral,**



Figura 2. Archytas de Tarentum. <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Archytas.html>.

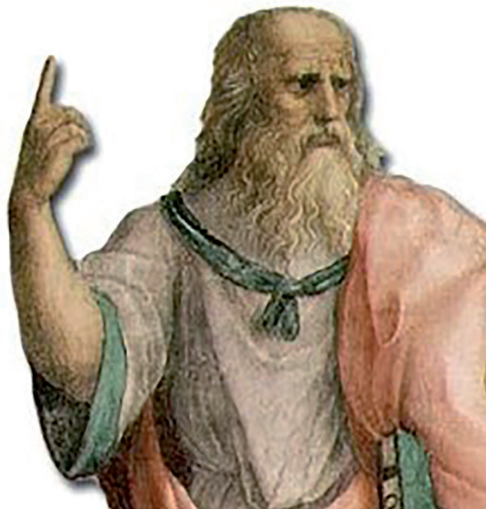


Figura 3. Platón. <http://www.philosophica.info/voces/platon/Platon.html>

era pura pedagogía. Hemos visto ut-supra con qué exquisitez y cuidado Pitágoras elegía a sus discípulos, las pruebas a las que los sometía, las iniciaciones sucesivas después de las cuales los clasificaba en varias categorías, por lo que podemos arriesgarnos a afirmar que podía considerarse como parte de la **educación integral** del individuo. Desafortunadamente, sobre los detalles de esta educación, tenemos muy poca información. Solo sabemos que los pitagóricos atribuían gran importancia a la gimnasia y la música: era necesario establecer entre el cuerpo y el alma una armonía lo más perfecta posible. Sobre todo, prescribieron a los jóvenes:

- La piedad hacia los dioses y la obediencia a las leyes del país que, según dijeron, no deberían modificarse a la ligera para imitar a las de otros países.
- No hay mal mayor que la falta de leyes, sin autoridad, los hombres no pueden subsistir.
- Los jóvenes debían ser educados para el estado, el respeto a los ancianos, la fidelidad a sus amigos, la moderación en todo, estas eran las principales virtudes a las que se ejercitaban.
- “...No es necesario”, dijo Pitágoras, “expulsar el placer de la vida, pero es necesario ahuyentar los placeres vulgares, y admitir solo el placer que viene después de lo que es justo y hermoso...”.

Hay motivos para creer que Platón, quien en su obra la *República* y en las *Leyes* ha entendido bien la importancia de la educación y ha desarrollado teorías, de manera tan favorable sobre este tema que se ha inspirado repetidamente en Pitágoras.

Al final de su vida, precisamente cuando estaba escribiendo la *República*, Platón estaba cada vez más dispuesto a acercarse a Pitágoras y apropiarse de sus principales doctrinas. En la *República*, por ejemplo, cuando explica cómo instruir a los jóvenes, hace una referencia directa a los pitagóricos. Para él, como para Pitágoras, como se ha indicado, la gimnasia y la música son los medios principales de educación, al menos lo que debe darse a todos los ciudadanos. Uno puede considerar, sin temor a equivocarse, la pedagogía de Platón como el desarrollo de la de Pitágoras: es a través de Platón que percibimos con mayor claridad las teorías pitagóricas sobre la educación.

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 99)

En el número 99 proponía dos ejercicios: a) en el primero, los conceptos de modelización y optimización se conjugan para obtener la forma y las dimensiones de un canal. Se trata de un interesante ejercicio (propuesto por M.F Guissarda en Losanges, nº40, págs. 34-39) de modelización fácilmente adaptable a diferentes niveles de enseñanza que en los que se puede desarrollar diferentes variantes y que me permito presentar sólo aplicado a un canal de sección y longitud fija. Y b) un segundo, conocido como el teorema de Napoleón. La leyenda atribuye este teorema al emperador Napoleón Bonaparte. El matemático italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) le habría dicho: "General, esperábamos todo de usted, excepto las lecciones de Geometría". Quizás este no sea el único hecho de las armas matemáticas de Napoleón. También se le atribuye una construcción que permite determinar con la ayuda de la única brújula el centro de un círculo dado

Propuesta 1: dos joyitas geométricas

JOYITA a)

- a) Construir una sección de un canal de capacidad máxima que se puede obtener, en planta, a partir de una hoja de zinc rectangular de 21cm de ancho paralelamente a su longitud.

NOTA: Se puede utilizar una hoja DIN-A4 para comprender la multitud de pliegues posibles.

SOLUCIÓN

Paso 1

Para trabajar, consideremos una hoja DIN-A4 e indicar a los alumnos la variedad de pliegues posibles que podemos hacer. Una cierta habilidad, en la manipulación, nos puede ayudar a tomar conciencia de las diferentes variables que entran en juego, y que las diferentes partes del canal (de la misma longitud) no tiene la misma capacidad.

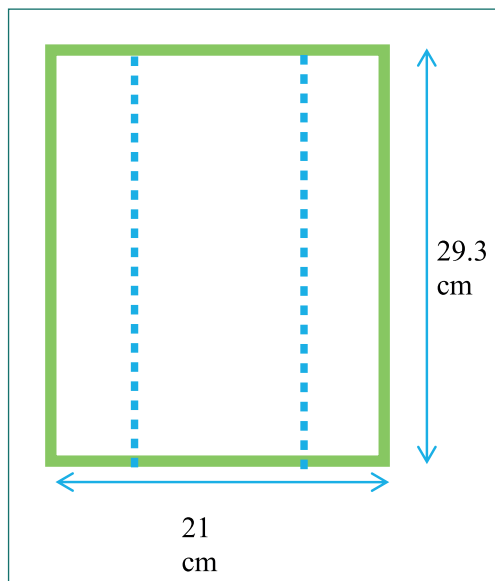


Figura 4. Canal.

Con esta fase de iniciación del ejercicio las cuestiones de optimización se pueden presentar de varias maneras.

Si preguntamos: **¿Cuál es el canal de capacidad máxima que se puede obtener plegando una plancha de zinc de 21 cm. de ancho paralelamente a su longitud?**

Con estas condiciones y restricciones, el problema no es accesible para el nivel de secundaria. Por lo tanto, hay que insistir al alumno que debe tomar conciencia de que hay que añadir algunas condiciones de restricción suplementaria. Otra dificultad añadida es comprender que, para construir un canal de capacidad máxima, es necesario maximizar el área de la sección perpendicular a la longitud del canal.

De todos los casos particulares, con grados de dificultad creciente:

- Canal con sección rectangular de longitud fijada.
- Canal con sección rectangular de longitud indeterminada L.
- Canal con sección trapezoidal (dividido en tres partes iguales)
- Canal con sección trapezoidal y pliegue simétrico.

voy a presentar el primero de la siguiente manera:

Plegando en ángulo recto, paralelamente a longitud, los dos bordes de una tira de zinc de 21 cm de largo, se forma un canal. Determinar las alturas de los bordes para que la capacidad del canal sea máxima.

Paso 2

En primer lugar, iniciemos el proceso con una sección del canal de, por ejemplo, cuatro metros de largo.

Hay que partir de la suposición que el fondo del canal es horizontal. En este contexto, los alumnos son inmediatamente persuadidos que las alturas de los dos bordes, que notamos h_{b1} y h_{b2} sobre la figura adjunta, deben ser iguales.

En efecto, en caso contrario, el agua saldría desbordada inmediatamente por nivel que *tuviese el borde menos alto*.

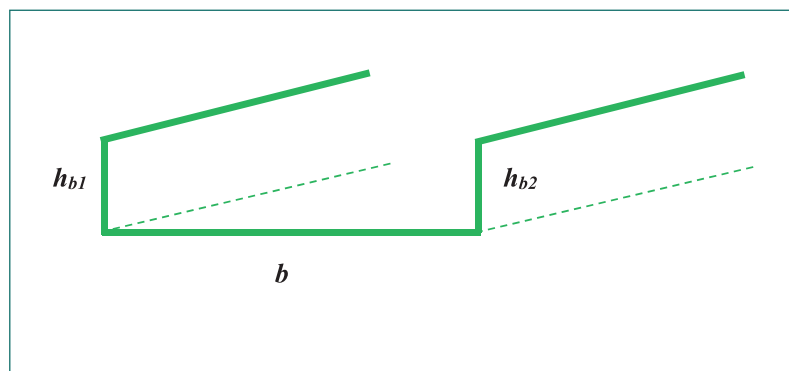


Figura 5. Simetría del pliegue (I).

En este caso, tendremos **zinc que no se utiliza** del otro lado. Si dividimos en dos partes la parte que excede para ponerla en el otro lado, se aumentaría la capacidad del canal. De esta observación, se deduce que los dos bordes deben ser de la misma altura, denotémosla por h .

La capacidad del canal se calcula entonces por la fórmula del volumen de un paralelepípedo rectángulo

$$V=B \cdot h$$

La altura a determinar, h , será entonces la variable. Expresamos entonces las dimensiones de la base en función de esta variable.

La base será de ancho $b=21-2h$ y de longitud $L=400$ cm.

Paso 3

Tendremos el volumen V expresado por la función

$$V(h)=400(21-2h) \quad h=400(21h-2h^2)$$

Ordenando la expresión, obtenemos el volumen

$$V(h)=400(-2h^2+21h)$$

En función de la variable h , y tendremos que buscar de que valor se trata de h para que el volumen sea máximo.

Notemos que los estudiantes que primero comprendieron que es la sección la que determina la capacidad no pasarán por este paso, lo cual es indispensable para los demás.

El volumen V es una función de segundo grado en h

$$V(h)=400(-2h^2+21h) = -800h^2 + 8400$$

Su gráfica es una parábola donde la concavidad es hacia abajo. Los alumnos pueden representarlas, eventualmente con cualquier programa por ordenador y remarcar que el valor máximo del volumen $V(h)$ se encuentra en el punto cumbre de la parábola.

Es también la ocasión de investigar la parte de la gráfica que corresponde al problema de interpretar los valores límites $h=0$ y $h=10.5$. El resto se comprende que es la abscisa del punto cumbre que proporciona el valor de h que realiza en ordenada el valor máximo de $V(h)$.

La respuesta a esta cuestión propuesta es entonces un canal que tiene de largo en la base 10,5 cm y los dos bordes verticales medirán 5,25cm (figura 6).

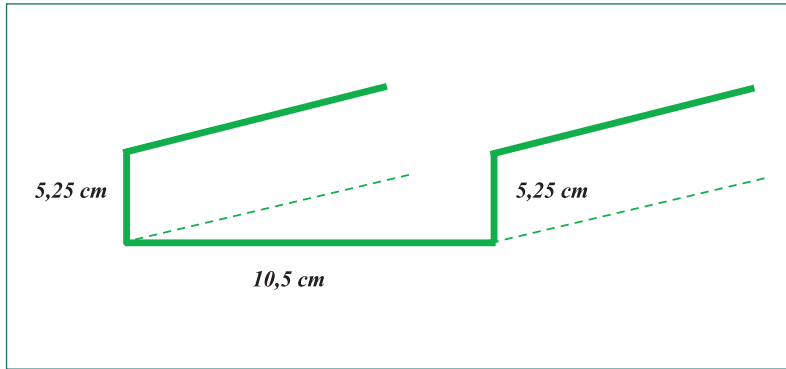


Figura 6. Simetría del pliegue (II).

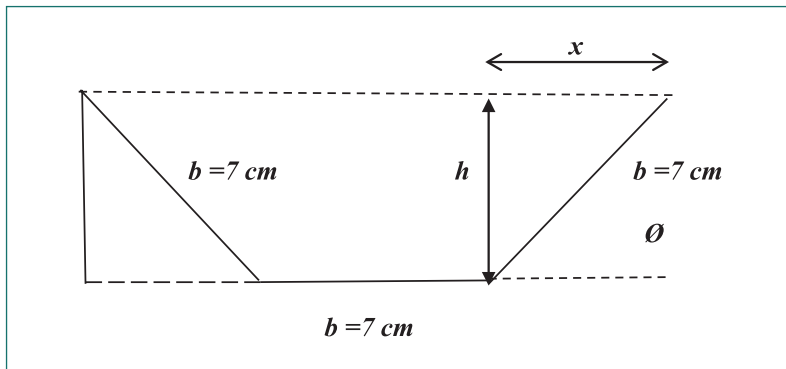


Figura 7. Sección trapezoidal.

Nota:

- a) A partir de aquí es interesante proponer a los alumnos que se reemplace los 400 cm por un canal de longitud genérica L para un canal de sección rectangular. ¿Qué pasará con la solución? Puede servir como ejercicio de entrada para el concepto de derivada.
- b) Se puede también estudiar el canal de sección trapezoidal con base b dada plegando dos veces (figura 7) plegando dos veces una plancha de zinc de 21 cm de ancho paralelamente a su longitud de manera simétrica con la se puede obtener un canal. ¿Cuál es el canal de capacidad máxima? En este caso la figura anterior ilustra la situación y pone en evidencia tres variables posibles, dos funciones irracionales y una trigonométrica:
 - h , altura de la sección trapezoidal isósceles.
 - x , la longitud de la proyección de la pared oblicua del canal sobre la dirección horizontal.
 - \emptyset , el ángulo agudo formado por la horizontal y el borde del canal.

- c) Y finalmente, también, plegando dos veces una plancha de zinc de 21 cm, paralelamente a su longitud, de manera simétrica (pero no necesariamente la tercera parte de su longitud) se puede presentar así la base así: $b=21-2y$ en función de los bordes del canal que notaremos por y .

Con todo ello tenemos la posibilidad de dar a los alumnos una perspectiva hacia cuestiones y conceptos matemáticos más avanzados que deben ser introducidos en función del nivel que se esté enseñando.

JOYITA b)



Figura 8. Emperador Napoleón Bonaparte.

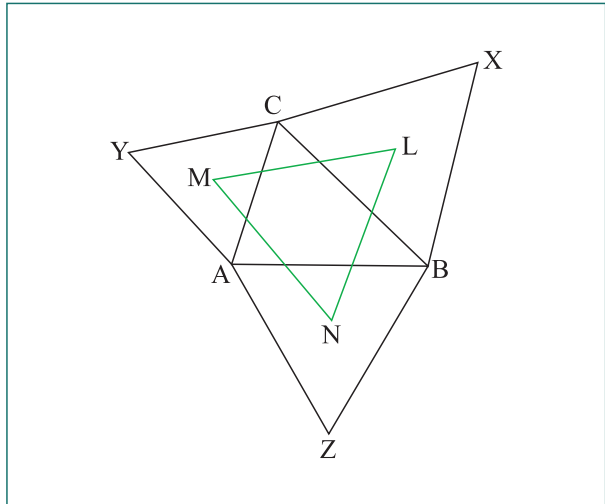


Figura 9. Teorema de Napoleón.

- b) Sea un triángulo cualquiera ABC . Si se construyen tres triángulos equiláteros a partir de sus lados, entonces los centros de los triángulos equiláteros es también un triángulo equilátero. (Teorema de Napoleón).

Notas

- a) Un teorema análogo es cuando los triángulos equiláteros se construyen en el interior de los lados de un triángulo y el denominado triángulo interior de Napoleón también es equilátero.
- b) Es sorprendente como la diferencia entre las áreas de los triángulos de Napoleón, exterior e interior, es igual al área del triángulo original

SOLUCIÓN

Paso 1

Veamos la demostración desde el punto de vista de la geometría clásica tan olvidada en los currículos actuales.

Los triángulos MCL y ACX son semejantes con una razón de semejanza igual a , fácilmente comprobable. En efecto:

En el triángulo CYA

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$
$$CA=l; CM= (2/3)h; CM = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}l \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}l$$

De aquí

$$\frac{CA}{CM} = \frac{l}{\frac{\sqrt{3}}{3}l} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Análogamente

$$\frac{CX}{CL} = \sqrt{3}$$

Y los ángulos MCL y ACX son iguales.

Paso 2

En lenguaje más moderno: por semejanza directa (resultado de la composición de una homotecia y de una rotación) de centro C, ángulo ± 30 grados y razón los puntos M y L se convierten en los puntos A y X.

De aquí inferimos que la longitud del segmento AX es igual a veces la longitud de ML.

Análogamente, razonando con los triángulos NBL y ABX se demuestra que la longitud de AX es también igual a veces las de NL. Así ML y NL tienen la misma longitud.

Se demuestra de igual forma –en comparación con BY– que LM y NM tienen la misma longitud.

En conclusión: NL = ML = NM y el triángulo es equilátero, csqd.

Nota

Para un nivel superior se recomienda al alumno que podemos trabajar utilizando los números complejos, partiendo de la expresión $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$ y de las notaciones de la figura y partir del plano complejo con referencia ortonormal.

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 99)

Los apilamientos infinitos de radicales

$$\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{a_1 + b_1 \sqrt{a_2 + b_2 \sqrt{a_3 + \dots}}}}$$

y la descomposición de un número en el producto de números primos será la base de las dos propuestas que presentamos en este número.

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

JOYITA a) Probar que

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + \dots}}}}} = 3$$

SOLUCIÓN

Paso 1

Existen raíces continuas, sucesión de radicales embebidos, para representar cualquier número entero.

La estrategia o técnica consiste en encontrar una función que pueda introducirse en el radicando: una raíz continua que se contenga a sí misma.

Sea la función:

$$f(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)\dots}}}$$

Paso 2

Debemos hacer notar que la función se encuentra en segundo rango multiplicada por x:

$$f(x) = \sqrt{1+x \cdot f(x+1)}$$

De aquí se tiene que elevando al cuadrado

$$[f(x)]^2 = 1+x \cdot f(x+1)$$

Si es una función lineal, reemplazando en la expresión anterior se tiene

$$(ax+b)^2 = 1+x[a(x+1)+b]$$

$$a^2x^2 + 2axb + b^2 = 1+ax^2 + (a+b)x$$

Paso 3

Para la constante b = 1

$$a^2x^2 + 2ax + 1 = 1+ax^2 + (a+1)x \Rightarrow a^2x^2 + 2ax = ax^2 + ax + x$$

$$(a^2 - a)x^2 + ax - x = 0 \Rightarrow (a^2 - a)x^2 + (a-1)x = 0$$

$$(a^2 - a)x + a - 1 = 0$$

La anterior ecuación se satisface para a=1 y se tiene que

$$f(x) = x+1$$

O en el caso numérico que nos interesa

$$x = 2 \Rightarrow f(x=2) = 2+1 = 3$$

Con lo que llegamos a demostrar que

$$\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+\dots}}}}} = 4$$

Nota

- a) Se ha visto que con $x = 2$, la raíz continua converge hacia 3 Análogamente con $x = 3$, tendremos que será 4,

$$\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+\dots}}}}} = 4$$

y así sucesivamente.

b) Podemos invitar al alumno que trabaje la técnica citada ut-supra y compruebe que

$$\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+\dots}}}}} = 4 \text{ es el número de oro } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033 \text{ solución de}$$

la ecuación

$$x^2-x-1=0$$

JOYITA b)

Demostrar que un entero natural n que es al mismo tiempo el cuadrado $n=p^2$ y el cubo $n=q^3$ también n es el cuadrado de un cubo.

Generalizando: Si a, b, n, m son enteros naturales con $n \wedge m = 1$ y $a^n = b^m$. Demostrar que existe un número entero c tal que $a = c^m$ y $b = c^n$.

SOLUCIÓN

A modo de indicación descompongamos a y b en factores primos e identificar las potencias de los exponentes y después utilizar el teorema de Gauss.

Paso 1

Vamos a contextualizar con detalles que es lo que nos están pidiendo en el ejercicio. Sea n un número entero que es a la vez un cuadrado y un cubo,

$$\begin{aligned} n &= p^2 \\ n &= q^3 \end{aligned}$$

Y lo que se quiere probar es que existe un entero c tal que

$$n=(c^3)^2=c^6.$$

Paso 2

Descompongamos n, p y q en producto de factores primos

$$\begin{aligned} n &= a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \dots a_p^{\alpha_p} \\ p &= a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} a_3^{\beta_3} \dots a_p^{\beta_p} \\ q &= a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} a_3^{\gamma_3} \dots a_p^{\gamma_p} \end{aligned}$$

Por unicidad de la descomposición en factores primos puesto que $n=p^2$, se tiene que

$$\forall i \in [1, 2, \dots, p] \text{ y puesto que } n=q^3, \text{ se tiene que } \begin{aligned} c &= p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} p_3^{\gamma_3} \dots p_p^{\gamma_p} \\ b &= a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} a_3^{\beta_3} \dots a_p^{\beta_p} \end{aligned} \quad \forall i \in [1, 2, \dots, p]$$

Tenemos así que cada a_i es múltiplo de 2 y de 3, por lo tanto de 6, y $\alpha_{ii} = 6\phi$

Podemos, por ello, escribir que

$$c = a_1^{\phi} a_2^{\phi} a_3^{\phi} \dots a_p^{\phi}$$

Y se tiene que $c^6=n$.

Paso 3: Generalicemos

Descompongamos a et b en producto de factores primos

$$\begin{aligned} a &= a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \dots a_p^{\alpha_p} \\ b &= a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} a_3^{\beta_3} \dots a_p^{\beta_p} \end{aligned}$$

La igualdad $a^n=b^m$ se traduce por $n\alpha_j=m\beta_j$ para todo $j=1, 2, \dots, p$.

Se tiene entonces que m divide a $n\alpha_j$ y puesto que $n \wedge m=1$, se tiene que m divide también a α_j . Escribamos, pues, que $\alpha_j=m\gamma_j$.

Por ello, encontramos que $n\alpha_j=m\beta_j$. Sea $\beta_j=n\gamma_j$. Así nos queda que

$$c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} p_3^{\gamma_3} \dots p_p^{\gamma_p}$$

o también $a = c^m$ y $b = c^n$

SAPERE AUDE: RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS APORTADAS POR LOS LECTORES

El número 100 de una revista es síntoma de que la sociedad responsable de su edición está muy viva. En este sentido quiero agradecer a todos los lectores que dedican parte de su tempo a la lectura de la misma. Por eso quiero saldar mi deuda y compromiso con dos compañeros a los que no les contesté por razones técnicas en su día a la solución dada a los problemas que vengo planteando en la sección **Rincón SAPERE AUDE... ¿resolviendo problemas?**

Soy consciente que ha habido un problema con la dirección de correo electrónico que aparece ut-infra. Habiéndose solucionado el problema, en este apartado que estará operativo siempre y cuando reciba ejercicios resueltos aportando nuevas, distintas e interesantes soluciones a las que yo puedo dar por los lectores de la revista EPSILÓN, aparecerán los autores de dichas aportaciones tal cual las presentan. En este caso, voy a adjuntar en formato WORD y PDF, las aportadas por Ricardo Barroso y Enrique Hoyos.

1. SOLUCIÓN DE RICARDO BARROSO (al ejercicio que se adjunta y que corresponde a la Propuesta 1, apartado (a), página 96 del número 97 de EPSILÓN)

a) Sea MNP un triángulo acutángulo. La bisectriz del ángulo en M corta al lado P en Q y al círculo β circunscrito al triángulo MNP en R . La tangente a β en N corta a MQ en S . Demostrar que si $MQ^2 = 2 PQ^2$, entonces R es la mitad de MS (ver figura).

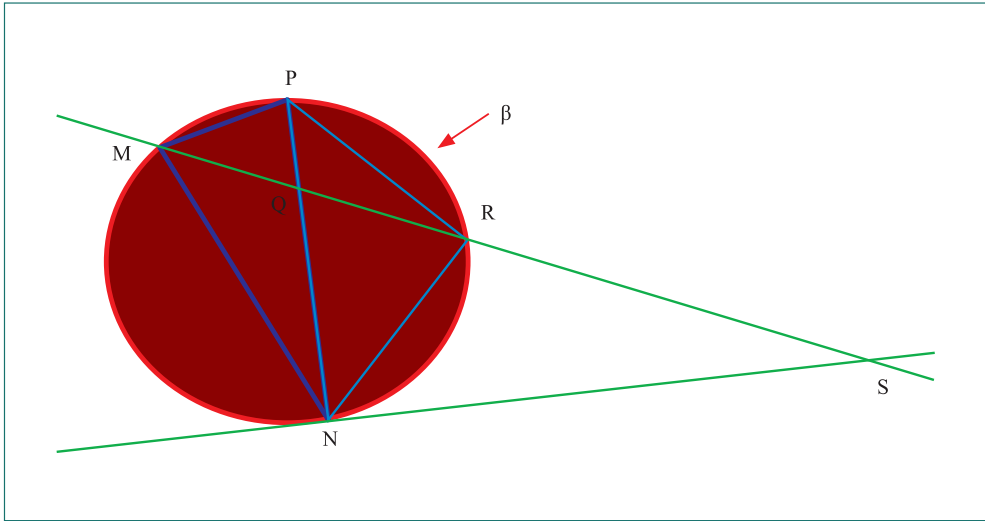


Figura 10. Triángulo acutángulo.

Sea $PQ=t$, $MQ=\sqrt{2}t$, $PM=u$

El triángulo RNQ es semejante al PMQ . Así, si $RQ=v$, es $QN=\sqrt{2}v$, y $NR=\frac{uv}{t}$. Siendo $PR=NR=\frac{uv}{t}$, por ser $\angle PMR = \angle NMR$, al ser MR bisectriz.

El triángulo MQN es semejante al PQR , luego $\frac{MN}{PR} = \frac{MQ}{PQ} = \frac{NQ}{RQ}$, de donde

Los triángulos SNR y SMN son semejantes, luego

$$\frac{SR}{SN} = \frac{SN}{SM} = \frac{NR}{MN} \rightarrow \frac{SR}{SN} = \frac{SN}{SM} = \frac{\frac{uv}{t}}{\sqrt{2}uv} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Así, $SN = \frac{SR}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}SR$, $SN = \frac{\sqrt{2}}{2} SM$ de donde se obtiene lo pedido, $SM=2SR$.

Observaciones

1) ¿Cómo construir un triángulo MNP que cumpla los requisitos del enunciado?

Tomemos un segmento PQ de longitud t .

Tracemos el cuadrado PQRS de lado PQ.

Con centro en Q tracemos la circunferencia de radio QS.

Tomemos un punto M de dicha circunferencia.

Tracemos el triángulo PQM. Tracemos la recta simétrica de PM según el eje de simetría MQ, que cortará a la recta PQ en N. PMN es el triángulo pedido.

2) La propiedad se mantiene para los triángulos rectángulos y obtusángulos.

2. SOLUCIÓN DE RICARDO BARROSO (AL EJERCICIO QUE SE ADJUNTA Y QUE CORRESPONDE A LA PROPUESTA 1, APARTADO (B), PÁGINA 96 DEL NÚMERO 97 DE EPSILÓN)

b) Sea MNP un triángulo equilátero de altura 1 unidad de longitud. El círculo β de radio 1 y de centro situado en el mismo lado de MN que P es tangente a MN en un punto situado entre M y N. Mostrar que la longitud de arco de círculo situado en el interior del triángulo MNP es independiente del punto de tangente.

Sin pérdida de generalidad podemos tomar un sistema de coordenadas con el centro en el punto medio de MN.

Así, es $P(0,1)$, $M(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$, $N(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$,

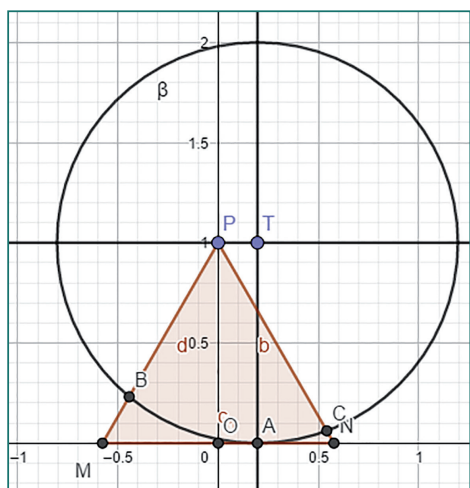


Figura 11. Triángulo equilátero.

El centro de β está situado en $T(t, 1)$, con $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ (figura 11).

Estudiemos las coordenadas de los puntos B, intersección de β con PM y C, intersección de β con PN.

La ecuación de β es:

$$(y - 1)^2 + (x - t)^2 = 1,$$

es decir $y^2 - 2y + x^2 - 2tx + t^2 = 0$

La recta PM es $\sqrt{3}x + 1$

La intersección es

$$B\left(\frac{t - \sqrt{4 - 3t^2}}{4}, \frac{\sqrt{3}t - \sqrt{12 - 9t^2} + 4}{4}\right)$$

Con respecto a PN, la ecuación es $y = -\sqrt{3}x + 1$

Y la intersección que nos interesa de la circunferencia es:

$$C\left(\frac{t+\sqrt{4-3t^2}}{4}, \frac{-\sqrt{3}t-\sqrt{12-9t^2+4}}{4}\right)$$

El vector BC es $\left(\frac{\sqrt{4-3t^2}}{2}, \frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$, cuyo módulo es constante e igual a 1.

De esta manera se concluye que el triángulo TCB es equilátero de lado 1, y por tanto la longitud de arco de círculo situado en el interior del triángulo MNP es independiente del punto de tangente, y mide $\pi/3$

3. SOLUCIÓN DE ENRIQUE HOYOS (AL EJERCICIO QUE SE ADJUNTA Y QUE CORRESPONDE A LA PROPUESTA 2, APARTADO (B), PÁGINA 128 DEL NÚMERO 95 DE EPSILÓN)

b) Si el radio del círculo más pequeño mide 2cm y que el del segundo círculo es de 3 cm, ¿cuál es el radio del tercer círculo?

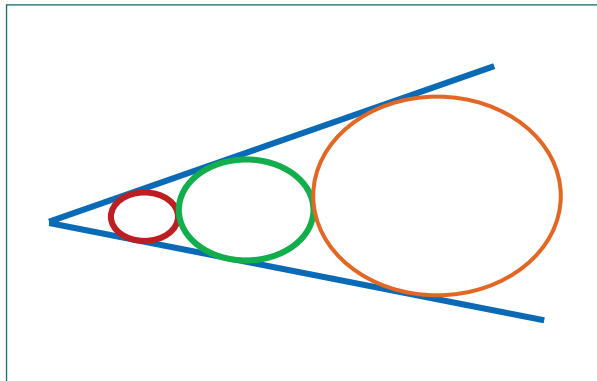
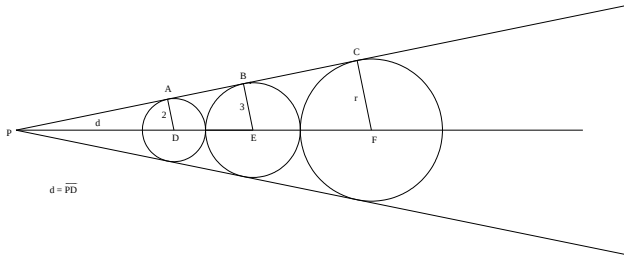


Figura 12. Triángulos equiláteros.

Epsilon 95. Rincón SAPERE AUDE.

Soluciones de Enrique Hoyos Jiménez

b) Si el radio del círculo más pequeño mide 2 cm y el del segundo círculo es de 3 cm, ¿cuál es el radio del tercer círculo?.



$$\frac{\overline{PD}}{2} = \frac{\overline{PE}}{3} = \frac{\overline{PF}}{r}$$

Llamando $d = \overline{PD}$:

De la 1ª igualdad:

$$\frac{d}{2} = \frac{d+2+3}{3} \Rightarrow 3d = 2d+10 \Rightarrow d = 10 ;$$

Luego $\overline{PE} = 10+2+3=15$; $\overline{PF} = 15+3+r = 18+r$;

Y en la 2ª igualdad queda:

$$\frac{15}{3} = \frac{18+r}{r} \Rightarrow 5r = 18+r \Rightarrow 4r = 18 \Rightarrow r = \frac{9}{2} = 4.5$$

Comentario a la solución del problema propuesto en Épsilon 92, sobre los ángulos en un triángulo isósceles:

Intenté resolver el problema, sin éxito, en tanto necesitaba alguna presunción sobre alineación de puntos o igualdad entre ángulos o lados que no he sabido demostrar.

Encuentro en la solución que aportas (en el número 93) que:

Figura 13.

Epsilon 95. Rincón SAPERE AUDE.

Soluciones de Enrique Hoyos Jiménez

« El triángulo $\triangle AB'C'$ es equilátero con el ángulo en \hat{A} de 60° »

Puedo entender que este triángulo es isósceles al estar construido mediante simetría, pero no veo la razón por la que se afirma que es equilátero. ¿Tendrías la amabilidad de explicarme este pormenor con algo de detalle?.

Un cordial saludo y agradecer de nuevo la bonita empresa que ha acometido.

Enrique Hoyos Jiménez

Figura 14.

4. SOLUCIÓN DE ENRIQUE HOYOS (AL EJERCICIO QUE SE ADJUNTA Y QUE CORRESPONDE A LA PROPUESTA 1, APARTADOS (A), (B) PÁGINA 107 DEL NÚMERO 96 DE EPSILÓN)

a) Si $2EO=AE$, $2FO=FD$ y que $ABCD$ es un cuadrado de lado 4 cm, ¿cuál es el área de la región coloreada en rojo?

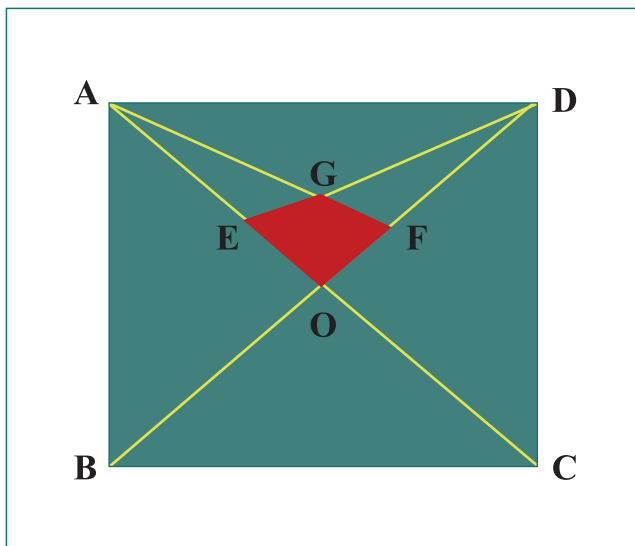


Figura 15. Región coloreada en un cuadrado.

c) Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que $\widehat{CAD}=25^\circ$, $\widehat{ACD}=45^\circ$ y $\widehat{BAC}=\widehat{BCA}=20^\circ$.
¿Cuánto mide el ángulo \widehat{DBC} ? (figuras 16 y 17).

5. SOLUCIÓN DE ENRIQUE HOYOS (al ejercicio que se adjunta y que corresponde a la Propuesta 2, apartados (a), (b) página 107 y 108 del número 96 de EPSILÓN)

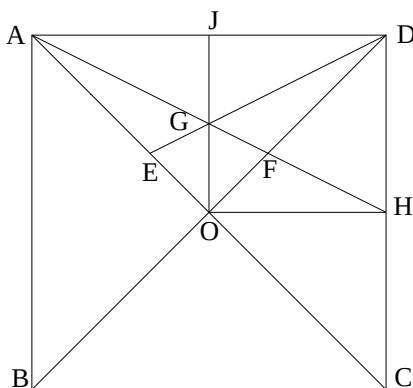
a) Consideremos $x, y, z, t \in \mathbb{N}$ tales que

$$x < 2y, y < 3z, z < 4t, y < 40.$$

¿Cuál es el valor mayor que puede tomar el número x ?

b) ¿Cuántas combinaciones de tres (tripletas) números primos $\{x, y, z\}$ satisfacen la ecuación $x + y + z = 200$? (figura 18).

96. 1.a.



Tomando O como origen de coordenadas, $OX = OH$; $OY = OJ$; tenemos que:

$$H(2,0); A(-2,2); J(0,2); D(2,2);$$

Y dado que $2\overline{OF} = \overline{FD}$ se verifica $\overline{OF} = \frac{1}{3}\overline{OD} \Rightarrow F\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y por simetría: $E\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Por otra parte: $\overline{AF} = \left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ de modo que la ecuación de la recta AF es:

$$AF: \vec{x} = \vec{a} + t\overline{AF} = \left(-2 + \frac{8}{3}t, 2 - \frac{4}{3}t\right)$$

En particular, para $t = \frac{3}{2}$: $\vec{x} = \left(-2 + \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2}, 2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}\right) = (2, 0)$. Luego $H \in AF$.

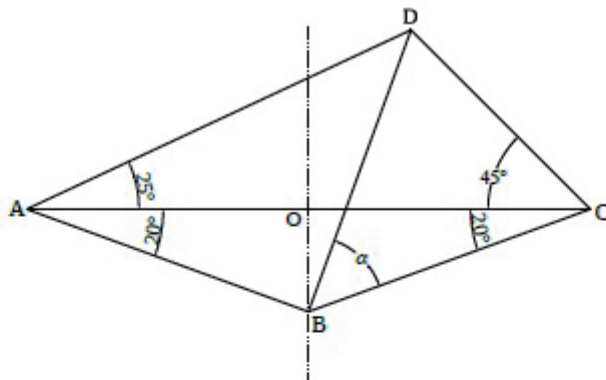
Y para el punto G: $-2 + \frac{8}{3}t = 0 \Rightarrow 8t = 6 \Rightarrow t = \frac{3}{4}$. Por lo que $G(0,1)$.

Por último, llamando S al área del cuadrilátero OFGE, se tiene que:

$$S = \|\overline{OG} \times \overline{OF}\| = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix} = \left\| \frac{2}{3}\vec{e}_3 \right\| = \frac{2}{3}$$

Figura 16.

96. 1.b.



Fijamos un sistema de referencia con origen en O, punto medio de \overline{AC} y $OX=AC$.
 $A(-r,0); C(r,0)$

$$\vec{d} = (-r, 0) + t(\cos 25^\circ, \operatorname{sen} 25^\circ) = (r, 0) + v(\cos 135^\circ, \operatorname{sen} 135^\circ) \Rightarrow \begin{cases} t \operatorname{sen} 25^\circ = v \frac{\sqrt{2}}{2} \\ t \cos 25^\circ + v \frac{\sqrt{2}}{2} = 2r \end{cases}$$

$$t = \frac{2r}{\cos 25^\circ + \operatorname{sen} 25^\circ} \Rightarrow \vec{d} = \left(-r + \frac{2r \cos 25^\circ}{\cos 25^\circ + \operatorname{sen} 25^\circ}, \frac{2r \operatorname{sen} 25^\circ}{\cos 25^\circ + \operatorname{sen} 25^\circ} \right)$$

$$\vec{b} = (0, z) = (-r, 0) + s(\cos 20^\circ, -\operatorname{sen} 20^\circ) \Rightarrow s = \frac{r}{\cos 20^\circ} \Rightarrow z = -r \tan 20^\circ$$

$$\vec{BC} = (r, r \tan 20^\circ); \vec{BD} = \left(\frac{2r \cos 25^\circ}{\cos 25^\circ + \operatorname{sen} 25^\circ} - r, \frac{2r \operatorname{sen} 25^\circ}{\cos 25^\circ + \operatorname{sen} 25^\circ} + r \tan 20^\circ \right)$$

$$\alpha = \arccos \left(\frac{|\vec{BC} \cdot \vec{BD}|}{\|\vec{BC}\| \|\vec{BD}\|} \right) = \arccos \left(\frac{r^2 \left(\frac{2 \cos 25^\circ}{\cos 25^\circ + \operatorname{sen} 25^\circ} - 1 + \tan 20^\circ \left(\frac{2 \operatorname{sen} 25^\circ}{\cos 25^\circ + \operatorname{sen} 25^\circ} + \tan 20^\circ \right) \right)}{r^2 \sqrt{1 + (\tan 20^\circ)^2} \sqrt{\left(\frac{2 \cos 25^\circ}{\cos 25^\circ + \operatorname{sen} 25^\circ} - 1 \right)^2 + \left(\frac{2 \operatorname{sen} 25^\circ}{\cos 25^\circ + \operatorname{sen} 25^\circ} + \tan 20^\circ \right)^2}} \right)$$

Calculadora en mano:

$$\alpha = \arccos 0.6427876097 = 0.8726646260 \text{ rad} = 50^\circ$$

Luego

$$\widehat{CBD} = 50^\circ; \widehat{DBA} = 90^\circ$$

Figura 17

96. 2.a.

Sean $x, y, z, t \in \mathbb{N}$ tales que $x < 2y, y < 3z, z < 4t, t < 40$. Equivalentemente

$$t \leq 39, z \leq 4t - 1, y \leq 3z - 1, x \leq 2y - 1$$

Sustituyendo sucesivamente

$$t \leq 39 \Rightarrow z \leq 4 \cdot 39 - 1 = 155 \Rightarrow y \leq 3 \cdot 155 - 1 = 464 \Rightarrow x \leq 2 \cdot 464 - 1 = 927$$

Ha de ser entonces $x \leq 927$

96. 2.b.

La resolución de la ecuación $x + y^2 + z^3 = 200$, con $x, y, z \in \mathbb{P}$ (*primos*) ha de realizarse por tanteo, para lo que establecemos el siguiente programa:

```
n = 0;
comp[x_, y_, z_] :=
(
  If[PrimeQ[x] && PrimeQ[y] && PrimeQ[z], {n++,
    Print["Tripleta ", n, " : (", x, ", ", y, ", ", z, ")"]}];
);

For[x = 1, x < 198, x++,
  For[y = 1, y < 14, y++,
    For[z = 1, z < 6, z++,
      If[x + y^2 + z^3 == 200, {comp[x, y, z]}]
    ]
  ]
]
```

Con los siguientes resultados:

```
Tripleta 1 : (23, 13, 2)
Tripleta 2 : (71, 2, 5)
Tripleta 3 : (71, 11, 2)
Tripleta 4 : (167, 5, 2)
```

Figura 18.

c) En el siguiente cuadro de número

1 2 3
4 5 6
7 8 9

la suma de los elementos que están en las diagonales valen 15. Si escribimos cuadros que se construyen siguiendo el mismo criterio con:

- C1. Los números del 1 al 64.
- C2. Los números del 1 al 144.

«Sapere Aude». Épsilon 96. Soluciones Enrique Hoyos Jiménez

96. 2.c.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Por construcción de la tabla $a_{jk} = 8(j-1) + k$; $j, k = 1, \dots, 8$. Luego:

$$\text{tr}(A) = \sum_{j=1}^8 a_{jj} = \sum_{j=1}^8 (8(j-1) + j) = \sum_{j=1}^8 (9j - 8) = 8 \cdot \frac{1+64}{2} = 260$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144

Similarmente al caso anterior, $a_{jk} = 12(j-1) + k$; $j, k = 1, \dots, 12$. Por lo cual

$$\text{tr}(A) = \sum_{j=1}^{12} a_{jj} = \sum_{j=1}^{12} (12(j-1) + j) = \sum_{j=1}^{12} (13j - 12) = 12 \cdot \frac{1+144}{2} = 870$$

En el caso general $a_{jk} = n(j-1) + k$; $j, k = 1, \dots, n$

$$\text{tr}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj} = \sum_{j=1}^n (n(j-1) + j) = \sum_{j=1}^n ((n+1)j - n) = n \cdot \frac{1+n^2}{2}$$

4/4

Figura 19.

¿Cuál será la suma de los elementos que están en cada una de las diagonales de los cuadros C1 y C2?

Generalizar al caso Cn: ¿cuál será la suma de los elementos de cada una de las dos diagonales del cuadro formado por los números del 1 a n²

**NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:
sapereaudethales@gmail.com**

